数学選書 4

数学の基礎的諸分野への現代的入門

ルベーグ積分入門

伊藤清三著

裳華房

数学選書 4

ルベーグ積分入門

東京大学名誉教授
理学博士
伊 藤 清 三 著

数学の基礎的諸分野への
現代的入門

東京 裳 華 房 発行

序

本書は大学理科の教養課程を終えられた学生諸君を対象として，Lebesgue 積分論を基礎から解説し，理論を一通り完成してから，その応用への橋渡しとして，函数空間の基礎事項と Fourier 解析の一般論を述べたものである．

Lebesgue 積分論が数学専攻の学生の必修課目であることは言うまでもないが，物理学や工学方面において必要な Fourier 解析，積分方程式，偏微分方程式，あるいは量子力学やエルゴード理論の基礎になる Hilbert 空間論などを真に理解するためには，Lebesgue 積分論が必要である．しかし，数学科以外の学生に対して Lebesgue 積分論の講義をする時間的余裕は皆無に近く，ごく一部の先生が必要な結果だけを説明して使われるほかは，大抵は（本来 Lebesgue 積分論によってのみ厳密に述べられる事項を）適当に省略して結論だけを出すというようにせざるを得ない状態である．数学科においてさえも，Lebesgue 積分論を（その重要性にもかかわらず！）完全に学生がこなせるようにするだけの時間がいつもあるとは限らないようで，講義をスピードアップしたり，表面的説明に終ったり，逆に丁寧に説明していると基礎事項を一通り済まさないで学年末を迎えたりすることもあるようである．

そこで本書は，Lebesgue 積分論の自習書にもなり，また講義を聞く場合の参考書にもなることを目的として書かれた．だから予備知識としては，大学理科の教養課程で習う数学の知識だけを仮定することにした．そのためには例えば‘三村征雄編，大学演習微分積分学（裳華房）’の程度で十分であり，この書物を本書の中でも時々引用した．また簡単な言葉の定義について，本書と同じシリーズの中の‘佐武一郎著，線型代数学’を二・三箇所で引用した．もっとも，これらの‘引用’は念のために書いたのであって，理科の教養課程を終了せられた学生諸君なら大抵は習って居られる事柄であろう．（従って，引用されている書物を，そのたびに開いて見る必要はないと思う．）なお，本書の執筆中に‘一松 信著，解析学序説（裳華房）上巻’が発行されたが，これは本書への予備知識として絶好であり，本書の終りの方でこの書物を引用した所もある．

上に述べた予備知識に含まれないもので Lebesgue 積分論の記述になくてはならぬものは‘集合’の概念であるが，これについては，集合論をくわしく知らなくても，本書を読むのに必要な程度に大体の意味を認識してそれを使えればよい．それで，一般集合論について §2 で簡単に説明し，点集合論については，付録において，本書に必要な厳密さだけを保って記述した．付録は必要に応じて参照せられればよいと思う．

以上のような趣旨のもとに本書は書かれているが，限られた講義時間数で多くのことを学ばねばならない現在の学生諸君にとって，本書が Lebesgue 積分論の学習に役立ち，さらに Lebesgue 積分およびそれを応用した函数解析への興味をひきおこすことになれば，著者の本懐とする所である．

最後に，本書のできるまでには裳華房編集部の安孫子貞次氏に始終おせわになったことを記し，ここに心から感謝の意を表する次第である．

1963 年 1 月

伊　藤　清　三

読者のために

1. 本書は六つの章と付録から成り，各章はいくつかの節（§）から成る．第Ⅰ章は準備，第 II, III, IV 章は Lebesgue 積分の基礎理論の構成，第 V, VI 章は Lebesgue 積分の応用としての函数解析への橋渡しである．付録は，本文中で時々使われる点集合論の基本的事項の解説である．また‘あとがき’においていくつかの参考書をあげ，本書から更に進んで学ばれる方の参考にした．

2. 節（§）は本文全体で通し番号（付録は別）とし，定理，式，例，問の番号は各節で通し番号とした．特に定理と式とは，後で引用するときの便利のため，‘定理 4. 1’，‘(5. 4)’のように番号づけてある；これらはそれぞれ‘§4の第1の定理’，‘§5の第4の式’（もちろん番号のついてない式は数えない）である．付録はその中だけで節の番号をつけ，定理は各節で通し番号をつけた．

3. ‘問’は本文の理解を助ける程度のものに止めたが，本文中に述べる定理の証明のうち，比較的簡単で演習問題に適したものの一部を‘問’にまわした．定理の証明以外の問題の中には二・三やや難解なものもある．すべての問題に対して，かなり丁寧な解答を巻末に与えてあるから，定理を証明する問題の解答は，そのまま本文の延長として読まれてさしつかえなく，必ずしも‘自分で試みるべき演習問題’と考えなくてよい．

4. 本文中の小活字の部分は，初めて読む場合は省略して進まれても，全体を通読するのに支障はない．また，定理自身またはその考え方は応用上重要であるけれども，本書を通読するには省略してもよく，進んで他の書物を読む場合に必要に応じて読み返せばよいという定理が二・三ある．そのような（重要な）定理は小活字にはしなかったが，定理の前に‘次の定理は省略してもよい’という意味のことを書いておいた．

5. ‘注意’として書いた事項は，補足的な注意事項ではなく，多くは他の定理や証明と同程度に，時にはそれ以上に‘注意すべき’重要な事項である．（だから‘注意’の大部分は小活字にしてない！ 注意のうちの小活字の部分は，他の小活字の部分と同等である．）

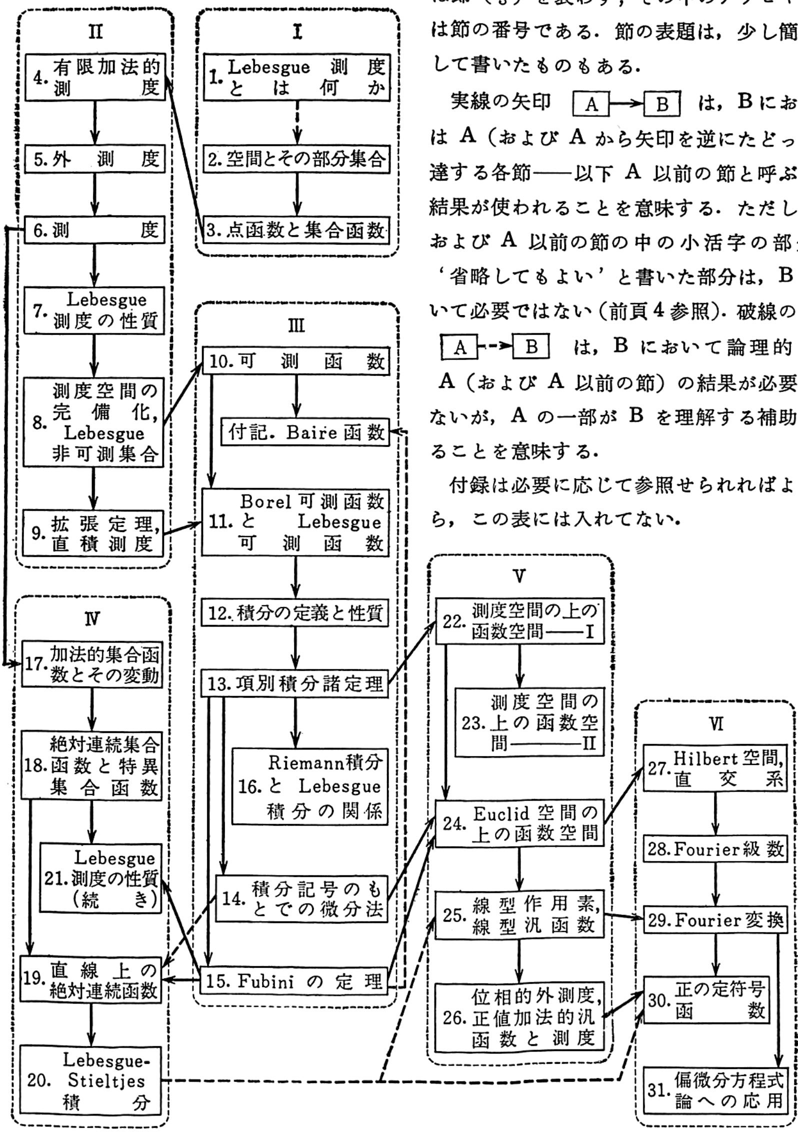
次の頁に，本書の各§の関係を示した表を与えておく．

本書の各 § の関係は下のとおりである．

点線の枠 ⌜⌟ は章を表わす；その中のローマ数字は章の番号である．実線の枠 □ は節（§）を表わす；その中のアラビヤ数字は節の番号である．節の表題は，少し簡単にして書いたものもある．

実線の矢印 A→B は，B においては A（および A から矢印を逆にたどって到達する各節——以下 A 以前の節と呼ぶ）の結果が使われることを意味する．ただし，A および A 以前の節の中の小活字の部分と‘省略してもよい’と書いた部分は，B において必要ではない（前頁4参照）．破線の矢印 A⇢B は，B において論理的には A（および A 以前の節）の結果が必要ではないが，A の一部が B を理解する補助になることを意味する．

付録は必要に応じて参照せられればよいから，この表には入れてない．



目　次

I 予備概念

II 測　度

III 可測函数と積分

IV 加法的集合函数

V 函数空間

VI Fourier 級数, Fourier 解析

付録 Euclid 空間における点集合論

I 予備概念

§1. Lebesgue(ルベーグ)測度とは何か

平面上の図形（多角形，円，あるいはもっといろいろな形の図形)，空間の中の図形（いろいろな形の立体）を文字 A, B 等で表わす．二つの図形 A, B が互いに交わらない（共通点がない）ときに，A と B とを合わせた図形を $A+B$ で表わすことにする．三つ以上の図形 A, B, C,… (無限列でもよい）があって，どの二つも互いに交わらないときに，$A+B+C+\cdots$を同様にして定義できる．

平面上の図形 A が多角形，円のような簡単な図形のときは，A の‘面積’は幾何学的に定義せられる．A が‘滑らかな曲線’で囲まれた図形のときも，その面積が Riemann（リーマン）積分（初等微分積分学で学ぶ普通の積分）で定義されることは，よく知られた通りである．図形 A の面積が定義せられるとき（以後このことを“A は面積を持つ”という）その面積を $|A|$ と書くことにすると，

1) A が面積を持てば $0\leqq|A|\leqq\infty$,

2) $A_1, A_2, \cdots, A_n$ が面積を持ち，どの二つも互いに交わらないときは，$A_1+A_2+\cdots+A_n$ も面積を持ち

$$|A_1+A_2+\cdots+A_n|=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|$$

（この性質を有限加法性という），

3) A と B とが合同（平行移動，回転，裏返しによって一方を他方に重ねることができる）なとき，A と B とのうち一方が面積を持てば他方も面積を持ち，それらは相等しい

などの性質がある．もしも 2) が図形の<u>無限列</u>についても成立するならば，すなわち

2′) $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ が面積を持ち，どの二つも互いに交わらないときは，$A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots$ も面積を持ち

$$|A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots|=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|+\cdots$$

（この性質を<u>完全加法性</u>という）

が成立するならば数学的取扱いに非常に便利であるが，Riemann 積分を使って定義された面積の概念だけでは 2′) は必ずしも成立しない．$A_1, A_2,\cdots$がすべて面積を持っても，それら<u>無限個</u>を合わせた $A_1+A_2+\cdots$は面積を持たないこともある．以上のことは空間の

中の図形についても同様である.

このような難点は，今世紀の初めに Henri Lebesgue (1875—1941) がその学位論文 (1902) において確立した測度 (measure) の概念によって克服せられた．それが今日 Lebesgue 測度 (Lebesgue measure) と呼ばれるものである．すなわち，一口に言えば，Lebesgue 測度とは‘直線上での長さ，平面上での面積，空間（一般に N 次元空間）の中での体積の概念の拡張’であって，上に述べた 1), 2), 3) の性質のみならず‘完全加法性 2′) を持つもの’である．そして（少し大ざっぱに言えば）Riemann 積分のときの面積，体積のかわりに‘Lebesgue 測度’を使って定義した‘積分’が Lebesgue 積分である.

Lebesgue 積分は，そのもとになる Lebesgue 測度の完全加法性のおかげで，函数列の極限とか無限級数などを取扱うのに大変便利である．Lebesgue 積分を考え得る函数は可測函数と呼ばれる範囲のものであるが，普通の連続函数はもちろん，Riemann 積分可能な函数はすべて可測函数である．また可測函数列の極限函数は可測であるから，連続函数から出発して，極限函数をとる操作を何回もくり返して得られる函数は，すべて可測になる．従って，例えば函数の項の級数の項別積分に関しても，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_A |f_n(x)|dx<\infty$$

ならば，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が存在して*)

$$\int_A\left\{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right\}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_A f_n(x)dx$$

が成り立つ．また例えば二重積分に関しては，$f(x, y)$ が $A\times B$ で可測ならば

$$\int\int_{A\times B}|f(x, y)|dxdy=\int_A dx\int_B|f(x, y)|dy=\int_B dy\int_A|f(x, y)|dx;$$

また上の三つの積分のうち少なくも一つが（従って三つとも）有限ならば，絶対値の記号を除いた等式が成立する.

これらの便利な性質のために，Fourier（フーリエ）解析，積分方程式，あるいは量子力学やエルゴード理論の基礎になる Hilbert（ヒルベルト）空間論への応用において，理論や計算がきわめて明快に運ばれるばかりでなく，それらの理論の発展に，従ってまたそ

---

*)　この言い方は厳密ではないが，測度論の用語をいくつか説明してからでないと厳密には述べられないから，ここでは大体の概念を説明するだけを目的としてこのように述べておく.

れらを真に理解するにはLebesgue積分は欠くことのできないものである．更に現代の確率論は Lebesgue 積分論の上に立って構成せられる．——むしろ確率論は Lebesgue 積分論であるとさえ言われる．

測度の概念やそれによる積分の概念は，必ずしも Euclid（ユークリッド）空間に限らないで，一般の抽象空間において論ずるのが自然であるから，本書でも抽象空間で理論を構成していく．しかし初学者の理解を助けるため，第II章前半までは，直観的にわかり易い Euclid 空間において例を作りながら話を進めることにする．第II章後半以後では，必ずしも Euclid 空間における例を一々あげないが，はじめて読まれる方（特に数学専攻以外の方）は Euclid 空間の場合だけを頭に浮かべながら読んでいただいて差支えない．あるいは更にわかり易いために，紙の上に描ける2次元の図形を考えるだけでもよい．このように考えて読み進んで行かれても，本書の中で特に‘Euclid 空間における’とことわった§の内容，およびそのようにことわった定理や問題を除いては，すべて Euclid 空間の考えから離れてもよいことが自然にわかってくることと思う．従って，更に進んで他の書物を読まれる場合に，抽象空間における積分論が使われていても，容易に理解せられるであろう．

次の §2, §3 では本書を読まれるのに直接必要な‘空間’，‘集合’などに関するいろいろの概念や記号を説明する．集合論としての体系を整えることは初学者（殊に数学専攻以外の方）にとってかえってわずらわしいものであろうから，厳密な体系ということは全く無視して，第II章以後を読まれるのに必要最小限度の概念の‘説明’だけを述べる．ことに§2 は集合論の‘講義’ではなく単なる直観的な‘お話し’であって，厳密な定義も証明もしてないことを前もっておことわりしておく．Euclid 空間における Lebesgue 測度だけを考える場合でも集合の概念は必要だから，集合論について全く未知の方は§2 を一応通読せられたい．集合論の初等的な知識を持って居られる方は，§2 を省略して §3 から読まれればよい．§3 以後は講義としての体系をとる．

数学において**集合**とは，素朴な言い方をすれば，互いに区別することができる‘もの’の集まりであり，その各々の‘もの’を集合の**元**という．特に集合が幾何学的考察の対象として扱われるときは‘空間’と呼ばれ，その元は空間の‘点’と呼ばれる．この場合も空間の一部分の点の集まりをやはり集合（またはその空間の部分集合）と呼ぶ．本書では常に空間としての取扱いをするから，次の§で集合の一般的なことを説明する場合も‘点’という言葉を使うが，一般集合論では‘元’というべきである．なお一般集合論に関しては巻末の‘あとがき’にあげた集合論の成書を見られたい．

§2. 空間とその部分集合

抽象空間とは，その中の点に対して座標のような概念も定義されてなく，また点と点との距離だとか，あるいはベクトルのような算法も何も考えないで，単に点の集まりとしてだけ考えた空間のことである．具体的には N 次元 Euclid 空間 R^N，あるいはその中の球面 S，あるいはまた一般のベクトル空間*) などを考えてよいが，その中で距離やベクトルの加法などを考えないのである．

ここで我々は空間とか点とかいう言葉を断わりなしに使ってしまった．数学的にはこれはいけないことであるが，数学的に‘定義’から始めることは初学者にはかえってとっつきにくく感じられる恐れがあるから，大体の概念を与えるだけを目的とした．(なお前§の末尾参照)．

以後抽象空間のことを単に**空間**と呼ぶ．

空間 X の中の点を $x, y, \cdots$ などのローマ小文字で表わす．X の中の点の集まりを X の中の**集合**あるいは X の**部分集合**といって $A, B, C, D, \cdots$ などのローマ大文字で表わす．例えば $X=R^2$ (2次元 Euclid 空間) のとき，その中の図形 (円，多角形など) は X の部分集合である．点 x が集合 A に属することを

$$x \in A \quad \text{または} \quad A \ni x$$

と書き，点 y が A に属しないことを

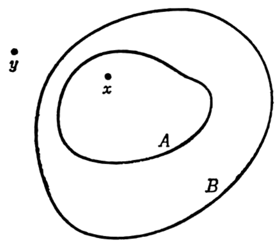
$$y \notin A \quad \text{または} \quad A \not\ni y$$

と書く．集合 A と集合 B とが一致することを

$$A=B$$

と書く．また集合 A が集合 B に含まれることを

$$A \subset B \quad \text{または} \quad B \supset A$$



と書き，A は B の**部分集合**であるという (特に $A=B$ でもよい)．‘点を一つも含まない集合’というものも便宜上集合の仲間に入れて，これを**空集合**と呼び本書では記号 ϕ で表わす**)．空集合はすべての集合の部分集合と考える．

集合の集まりのことを**集合族**という．例えば R^2 の中の矩形 (＝長方形) の全体は一つの集合族である．集合族を表わすには $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}, \cdots$ などのドイツ大文字を使う．

点 $x, y, \cdots, w$ から成る集合を $\{x, y, \cdots, w\}$ と書くことがある．同様に，$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ (無限個) から成る集合を $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ と書く．また記号 $\{x ;\cdots\cdots\}$ は条件……

*) 例えば，佐武一郎著，線型代数学 (裳華房) 16頁，115頁参照．

**) θ なる記号を使った書物もある．

を満たすすべての点 x の集合を表わす．例えば実数の全体（あるいは，同じことであるが，それによって表現される直線）を X として取扱っている場合

$$\{2n-1\,;\ n=1, 2, \cdots\}\ \text{は正の奇数の全体,}$$

$$\{2n\,;\ n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}\ \text{は偶数の全体,}$$

を表わす．なおこの記号でセミコロン（；）の後の条件の書き方は，誤解の恐れがない限りなるべく簡単に書くことが多い．例えば X として実数直線を考えて，その中の集合や点を考察の対象としているときは

(♯)　$$\{x\,;\ |x|\leqq 1\}$$

は $\{x;\ x$ は実数で $|x|\leqq 1\}$ の意味であるが，X として複素数平面を考えているときには，上の（♯）は $\{x;\ x$ は複素数で $|x|\leqq 1\}$ の意味である．（複素数は文字 z で表わすのが‘常識’と思う人もあるかも知れないが，そうしなければならないわけではあるまい！）

集合に関する演算．集合 $A, B, C, \cdots$（有限個でも無限個でもよい）の少なくも一つに含まれる点の全体，すなわちこれらの集合を全部合併して得られる集合を，$A, B, C, \cdots$ の**和集合**または**合併集合**といい

$$A\cup B\cup C\cup\cdots$$

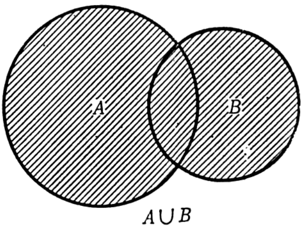
と書く，また $A, B, C, \cdots$ のすべてに含まれる点の全体，すなわちこれらの集合すべての共通部分を，$A, B, C, \cdots$ の**交わり**，**積集合**，あるいは**共通集合**といい

$$A\cap B\cap C\cap\cdots$$

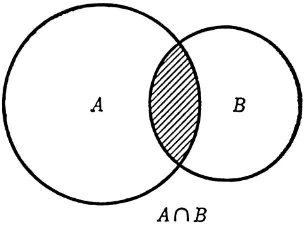
と書く，$A\cap B=\phi$ のとき A と B とは交わらない，または**互いに素**であるという．$A, B, C, \cdots$ のどの二つも交わらないとき，これらの和集合 $A\cup B\cup C\cdots$ のことを**直和**といって，本書では*) この場合に限り

$$A+B+C+\cdots$$

と書くことにする．



$A\cup B$



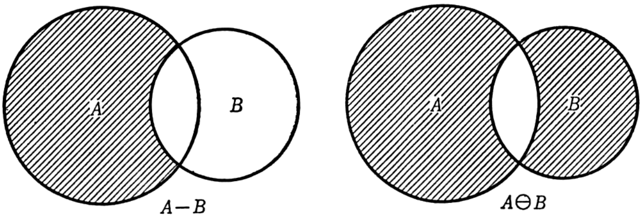
$A\cap B$

*) 直和でない和集合の場合にも＋を使った書物も多く見られる（次の頁の $\sum$ についても同様である）が，本書ではこのように使い分けることにする．

A に含まれて B に含まれない点の全体を $A-B$ と書き，A から B を引いた**差**（**集合**）という．このとき $A\supset B$ である必要はない．従って

$$A-B=A-A\cap B.$$

$(A-B)+(B-A)$ を A と B との**対称差**といって $A\ominus B$ と書く．また $X-A$ を A の**補集合**または**余集合**といい A^c と書く．



$A-B$　　　$A\ominus B$

集合の列 $A_1, A_2, \cdots$（有限または無限）に対して，次のように（各式の左辺の記号を）定義する：和集合のとき

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_N,$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots;$$

特に直和の場合は

$$\sum_{n=1}^{N} A_n=A_1+A_2+\cdots+A_N,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n=A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots;$$

同様に交わりは

$$\bigcap_{n=1}^{N} A_n=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_N,$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$$

とする．

次の公式が成り立つことは定義から容易にわかる．

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A \text{（交換律）};$$

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\quad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \text{（結合律）};$$

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),\quad (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C) \text{（分配律）};$$

更に一般に

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\cap B=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B),\quad \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)\cup B=\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\cup B)\,;^{*)}$$

また

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n{}^c,\quad \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n{}^c$$ (**de Morgan**（ド・モルガン）**の公式**).

次に集合列 $\{A_n\,;\, n=1,\ 2,\ \cdots\}$ に対して，集合 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\nu=n}^{\infty} A_\nu$ を $\{A_n\}$ の**最大極限集合**または**上極限集合**といい，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n$ または $\overline{\lim}\, A_n$ と書く；また集合 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{\nu=n}^{\infty} A_\nu$ を $\{A_n\}$ の**最小極限集合**または**下極限集合**といい，$\underline{\lim}_{n\to\infty}\, A_n$ または $\underline{\lim}\, A_n$ と書く．この定義から明らかに

$$\underline{\lim}\, A_n \subset \overline{\lim}\, A_n$$

であるが，特に $\underline{\lim}\, A_n=\overline{\lim}\, A_n$ のときはこの共通の集合を単に**極限集合**といい $\lim_{n\to\infty} A_n$ または $\lim A_n$ と書く．極限集合が存在するとき集合列 $\{A_n\}$ は**収束する**（または**収斂する**）という．

（上極限集合，下極限集合の定義は実数列 $\{a_n\}$ の上極限，下極限**) と対応させると覚え易い．すなわち $\{a_n\}$ に対して

$$\overline{\lim}\, a_n=\inf_n \sup_{\nu\geqq n} a_\nu,\quad \underline{\lim}\, a_n=\sup_n \inf_{\nu\geqq n} a_\nu$$

であるが，この sup, inf をそれぞれ $\bigcup$, $\bigcap$ でおきかえればよい．$\overline{\lim}\, a_n=\underline{\lim}\, a_n$ のときにこれを $\lim a_n$ とすることも同様である．）

直積空間．二つの空間 X, Y が与えられたとき，X の点 x と Y の点 y との対(つい) $(x,\ y)$ の全体 Z を一つの空間と考えてこれを X と Y との**直積空間**といい

$$Z=X\times Y$$

と書く．Z の点は X, Y の点の対 $(x,\ y)$ で表わされるが，これを一つの文字 z で表わすこともある．$A\subset X$, $B\subset Y$ に対して

$$\{(x,\ y)\,;\ x\in A,\ y\in B\}$$

は Z の部分集合である．これを $A\times B$ で表わし A と B との**直積**という．

例えば $X=R^1$, $Y=R^1$（ともに直線）のとき $X\times Y$ は平面 R^2 である．その中の点を

---

*) これは分配律の一般化である．もっと一般化できるが，本書では必要がないから省略する．

**) 例えば，三村征雄編，大学演習微分積分学（裳華房）付録3（特にその中の定理2）参照．

(x, y) で表わすのは，いわゆる 'x-座標と y-座標とで表わす' ことにほかならない．また

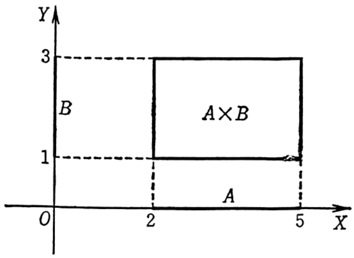
$$A=\{x ; x \in X, 2 \leqq x \leqq 5\}$$

$$B=\{y ; y \in Y, 1 \leqq y \leqq 3\}$$

ならば，$A \times B$ は矩形

$$\{(x, y) ; 2 \leqq x \leqq 5, 1 \leqq x \leqq 3\}$$

である（右図）．なお一般に R^p と R^q との直積は R^{p+q} であることも容易にわかる．



有限集合，無限集合，可算集合．有限個の点から成る集合を有限集合という．空集合も有限集合のうちに入れる（0個の点から成ると考えればよい）．有限集合でない集合を無限集合という．無限集合 A の点に $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ と自然数の番号をつけて並べ A のすべての点を並べつくされるとき，A を**可算無限集合**（または**可付番無限集合**）という．有限集合と可算無限集合とを合せて，**可算集合**または**高々可算無限集合**と言うことがある．（有限集合の点はもちろん番号をつけて並べつくされる．）

例．I．N を定まった自然数とすると $1 \leqq n \leqq N$ なるすべての自然数 n の集合は有限集合である．すべての自然数の集合は可算無限集合である．すべての実数の集合は無限集合である（これが可算集合でないことを後に示す）．

II．すべての整数の集合は可算無限集合である．それは

$$\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots, n, -n, \cdots\}$$

という順に並べてみればわかる．

III．すべての正の有理数の集合は可算無限集合である．何となれば，正の有理数は $\frac{m}{n}$（m, n は互いに素な自然数）の形に一通りに表わされるから，まず

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\cdots$$

なる列を考えておいて，既約分数でないもの（それに等しい分数がそれより左に現われているはずである）を消して行き，残ったものに左から新しく番号をつければ可算集合であることがわかる．無限集合であることは明らかである（少なくもすべての自然数を含む）．

IV．すべての有理数の集合は可算無限集合である．何となれば，III によりすべての正の有理数が $\{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$ と並べられるから，すべての有理数は

$$\{0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, \cdots, r_n, -r_n, \cdots\}$$

により並べつくされる．

上の例 III の‘並んでいるものの一部分を消す’考え方を一般にして

(2. 1)　可算集合の任意の部分集合は可算集合である

ことがわかる．すなわち，A が可算集合で $B\subset A$ ならば，Aの点を $\{a_1, a_2, \cdots\}$ と並べておき，その中で B に属しないものを消して新しい番号をつければよい．

また例 II, IV の考え方を見ると，$A=B+C$ で B, C が可算集合なら A も可算集合であることがわかる．すなわち

$$
A\begin{cases}
B=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots\cdots,\ b_n,\ \cdots\cdots\} \\
\quad\ \ \downarrow\nearrow\downarrow\nearrow\downarrow\nearrow\quad\ \nearrow\downarrow\nearrow \\
C=\{c_1,\ c_2,\ c_3,\ \cdots\cdots,\ c_n,\ \cdots\cdots\}
\end{cases}
$$

として，矢印の順に番号づければよい．これをもっと一般化して

(2. 2)　可算集合の可算個の和集合は可算集合である，

すなわち，$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ が可算集合ならば

$$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$$

も可算集合であることを示そう．まず $A_1, A_2, \cdots$ がどの二つも互いに素でいずれも無限集合であるときは，次のように並べて矢印の順に番号づければよい：

$$
\begin{array}{l}
A_1=\{a_{11},\ a_{12},\rightarrow a_{13},\ a_{14},\ \cdots\cdots\} \\
\qquad\ \ \downarrow\ \nearrow\qquad\swarrow \\
A_2=\{a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{24},\ \cdots\cdots\} \\
\qquad\qquad\swarrow\quad\nearrow \\
A_3=\{a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ a_{34},\ \cdots\cdots\} \\
\qquad\ \ \downarrow\ \nearrow \\
A_4=\{a_{41},\ a_{42},\ a_{43},\ a_{44},\ \cdots\cdots\} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{array}
$$

$A_1, A_2, \cdots$ が互いに素でないときは上の $\{a_{mn}\}$ の中に同じものが重複して現われているから，矢印の順に番号づけてから，2度以上現われたものの2度目以後を消せばよい．また $A_1, A_2, \cdots$ の中に有限集合があれば上の a_{mn} の中に欠けた所ができるから，矢印をつけるときに欠けた所を飛び越えて行けばよい．

次に可算集合でない無限集合の例として，

(2. 3)　$0<x\leqq 1$ なるすべての実数 x の集合 I は可算集合でない

ことを証明しよう．$x\in I$ は十進小数*)で

(2. 4)　$$0.\,a_1\,a_2\,a_3\cdots$$

と表わされるが，特に有限小数は9を周期とする循環小数でおきかえる（例えば $0.38=0.37999\cdots$, $1=0.9999\cdots$）ことにすると，すべての $x\in I$ は (2. 4) の形の無限小数にただ一通りに表わされる．今 I が可算集合であると仮定すると $I=\{x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots\}$ と

---

*)　何進小数でも同じことである．

表わされるから，各 x_n を無限小数で表わして

$$\begin{array}{l} x_1=0.\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \cdots\cdots \\ x_2=0.\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \cdots\cdots \\ x_3=0.\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

とする．ここで対角線 ↘ に沿った数字から成る小数

$$0.\ a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ \cdots\cdots$$

を考え，これに対して

$$\text{(2. 5)}\qquad \begin{cases} a_{nn}=1 & \text{ならば}\quad b_n=2 \\ a_{nn}\neq 1 & \text{ならば}\quad b_n=1 \end{cases}$$

と定義して得られる無限小数

$$y=0.\ b_1\ b_2\ b_3\ \cdots\cdots$$

を考えると，明らかに $0<y\leqq 1$ すなわち $y\in I$ である．ところが (2. 5) により

y と x_1 とは小数第1位が等しくない，

y と x_2 とは小数第2位が等しくない，

y と x_3 とは小数第3位が等しくない，

……………………………………………

と順次見て行くと，y はどの x_n にも等しくないことになり $y\notin I$ となる．これは矛盾である．だから I は可算集合ではない（証明終）.

従ってすべての実数の集合 R^1 は可算集合でない；もしも R^1 が可算なら (2. 1) により (2. 3) の I も可算でなければならないことになる．

集合に属する点が‘どのぐらい多いか’を表わすのに集合の**濃度**という言葉がある．有限集合の濃度とは，その集合に属する点の数である．すべての自然数の集合の濃度を**可算無限の濃度**といい$\aleph_0$で表わすことが多い．（$\aleph$はヘブライ文字でアレフと読む；ギリシャ文字のアルファに相当する.）可算無限集合は自然数と同じように‘番号づけて並べる’ことができるから，すべて濃度 $\aleph_0$ を持つという．これに対して $0<x\leqq 1$ なるすべての実数 x の集合 I は，上に証明したように‘並べる’ことはできないから，その濃度は $\aleph_0$ より‘大きい’と考えるべきである．この I は**連続体の濃度**を持つと言われる．連続体の濃度を $\aleph$ で表わすことが多い．濃度は集合論における最も重要な概念の一つであるが，くわしいことは集合論の成書にゆずり，ここではこれ以上立ち入らないことにする．

集合の定義函数．A を空間 X の中の集合とする．X の上で函数 $\chi_A(x)$ を

$$\chi_A(x)=\begin{cases} 1 & (x\in A\ \text{のとき}) \\ 0 & (x\notin A\ \text{のとき}) \end{cases}$$

で定義し，これを集合 A の**定義函数**（または**特性函数**）という．$\chi_A(x)$ を $\chi(x;\ A)$ と書くこともある．このとき

$$\chi(x;\ \overline{\lim}\, A_n)=\overline{\lim}\,\chi(x;\ A_n),\quad \chi(x;\ \underline{\lim}\, A_n)=\underline{\lim}\,\chi(x;\ A_n)$$

なることは容易に験証される．

N 次元 Euclid 空間 R^N においては座標や距離などが定義されているから，測度論に出て来るいろいろの概念の具体的な例を作るのに便利であるばかりでなく，R^N における本来の体積の概念を直接拡張したものとしての Lebesgue 測度とそれによる Lebesgue 積分は，それ自身も理論上並びに応用上重要である．だから本書でも最初は R^N における測度を引合いに出しながら話を進める．そのためには R^N における点集合論（距離の概念に関係した集合の性質をしらべること）のいくつかの結果を使わなければならないから，必要な説明を付録に与えておく．

問 1. $A\cup B=A+(B\cap A^c)$

問 2. $A=\sum_{i=1}^{n}A_i,\ B=\sum_{j=1}^{m}B_i$ ならば $A\cap B=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}A_i\cap B_j$.

§3. 点函数と集合函数

X を任意の空間とする．$X=R^N$ でもよいしもっと一般の空間でもよい．今後集合と言えば X の部分集合，集合族と言えば X の部分集合の族を意味する．

空間 X と集合族 $\mathfrak{F}$ と集合 F とが与えられたとき，次の二種類の函数を考える：

1）**点函数**．集合 F の点 x に対して定義された普通の意味の函数 $f(x)$ を F で定義された点函数という．

2）**集合函数**．F の部分集合であって $\mathfrak{F}$ に属する集合 E（すなわち $E\subset F$, $E\in\mathfrak{F}$ なるもの）に対して定義された函数 $\Phi(E)$ を F で定義された $\mathfrak{F}$- 集合函数という．このときは通常 F 自身も $\mathfrak{F}$ に属するものとする．また誤解の恐れがなければ $\mathfrak{F}$- を書かないで単に集合函数という．

今後単に函数といえば点函数を意味するものとする．

点函数および集合函数のとる値は，次の二つの場合を考える：

i）実数または$+\infty$，$-\infty$の値*)，

ii）複素数の値（このときは∞を考えないことにする)．

そして i) の場合には，$\pm\infty$を含んだ大小関係と演算を次のように約束する：a を任意の

---

*) 特に‘実数値函数’と断わったときは $+\infty$，$-\infty$をとらない．

実数とするとき，大小関係は

$$-\infty < a < +\infty$$

とし，算法は（以下複号同順）

$$(\pm\infty)+a=\pm\infty,\quad a+(\pm\infty)=\pm\infty,$$
$$(\pm\infty)-a=\pm\infty,\quad a-(\pm\infty)=\mp\infty,$$
$$(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty,\quad (\pm\infty)-(\mp\infty)=\pm\infty,$$
$$a\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot a=\begin{cases}\pm\infty & (a>0\text{ のとき})\\ \mp\infty & (a<0\text{ のとき})\end{cases}$$
$$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$$

とする．これ以外の算法は約束しない．例えば $(\pm\infty)+(\mp\infty)$，$(\pm\infty)-(\pm\infty)$ は意味がない．

積分論では，上に述べた算法のほかに $0\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot 0=0$ と約束することがある．こうすることは，論理を形式上統一して記述を簡単にするのには便利であるが，初学者には一見奇異に感じられるばかりでなく，その本来の意味は‘$0\cdot a_n$ なる形のもの（ここに a_n は有限で $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ または$-\infty$）の極限として0になるのである’ということを見失わせる恐れがあるから，本書ではこの約束を使わないで議論を進めることにする．

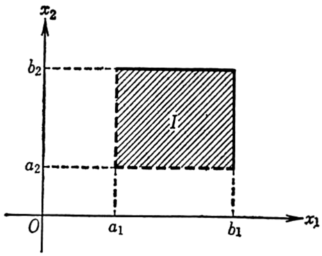
R^1 の中の**区間** $(a, b]$ とは $\{x;\ a<x\leqq b\}$ のことである．ここで $-\infty\leqq a<b\leqq\infty$ とする．ただし $b=\infty$ のときは $(a, b]=\{x;\ a<x<b\}\equiv(a, \infty)$（すなわち $x=\infty$ を含まない）と約束する．本書では上の形の集合を単に区間と呼ぶことにし，また $(a, b)=\{x;\ a<x<b\}$，$[a, b]=\{x;\ a\leqq x\leqq b\}$ をそれぞれ**開区間**，**閉区間**と呼ぶ．空集合は上の区間の定義には含まれないが，便宜上空集合も区間の一つと考える．

R^N において，$-\infty\leqq a_\nu<b_\nu\leqq\infty$ なる a_ν, b_ν $(\nu=1, \cdots, N)$ に対して

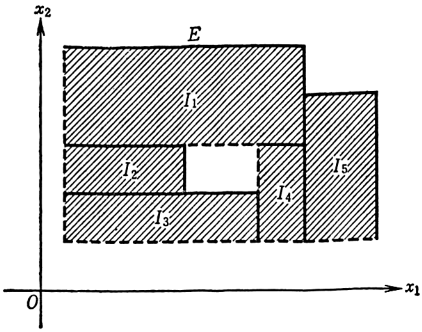
$$\begin{aligned}I&=\{(x_1, \cdots, x_N);\ a_\nu<x_\nu\leqq b_\nu\quad(\nu=1, \cdots, N)\}\\&=(a_1, b_1]\times\cdots\times(a_N, b_N]\end{aligned}$$

なる形の集合を（N 次元の）区間という．R^1 の場合と同様に，空集合も区間と考える．有限個の区間の直和として表わされる集合を**区間塊**という．R^N における区間の全体を $\mathfrak{S}_N$，区間塊の全体を $\mathfrak{F}_N$ と書くことにする．

‘区間’の定義を上のようにしたことにより，‘区間塊’を有限個の区間の直和として定義することができた（次の図を参照）．このことによって，今後の議論が便利になっている点が多い．閉区間を単に‘区間’と呼び，内点を共有しない有限個の（閉）区間の和集合を‘区間塊’と呼ぶことにしても，本質的には同じことであるが，以下の議論の中に外見上複雑になる点がいくつか現われるであろう．



R^2 における区間 I
右上の頂点と実線の辺とは I に属するが，他の三つの頂点と点線の辺とは I に属しない．



R^2 における区間塊 E:
$E=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5$

（今後は区間を図示するとき上のような実線と点線の区別をしない．）

次に重要な集合函数の例をあげる．前に述べた定義において $X=F=R^N$ とする．

例 1. $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_N$ とし，$f(x)\equiv f(x_1, \cdots, x_N)$ を R^N で連続な実数値（または複素数値）函数で

$$\int_{R^N}|f(x)|dx<\infty$$

（$\int\cdots dx$ は N 次元空間での Riemann 積分，$dx=dx_1\cdots dx_N$）なるものとする．このとき

$$\Phi(E)=\int_E f(x)dx \quad (E\in\mathfrak{F}_N)$$

は実数値（または複素数値）$\mathfrak{F}_N$-集合函数である．ただし $\Phi(\phi)=0$ とする．

例 2. $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_N$ とし，$f_1(\lambda), \cdots, f_N(\lambda)$ を R^1 で単調増加な実数値函数で，定数ではないもの*) とする．有界な区間

$$I=(a_1, b_1]\times\cdots\times(a_N, b_N] \quad (-\infty<a_\nu<b_\nu<\infty;\ \nu=1, \cdots, N)$$

に対して

$$\Psi(I)=\prod_{\nu=1}^{N}\{f_\nu(b_\nu)-f_\nu(a_\nu)\},$$

有界でない区間 I に対しては

$$\Psi(I)=\sup\{\Psi(J);\ J \text{ は } I \text{ に含まれる任意の有界区間}\}$$

*) $f_\nu(\lambda)$ の中に定数のものがあっても例 2，例 3 の事柄は成り立つが，そのときは例 2 の $\Psi(I)$，例 3 の $\mu(E)$ の値は恒等的に 0 になるから，つまらない場合である．

と定義し，$\Psi(\phi)=0$ とすると，これは $\mathfrak{I}_N$- 集合函数である．特に $f_\nu(\lambda)=\lambda$ $(\nu=1, \cdots, N)$ のときは，$\Psi(I)$ は普通の意味の N 次元の体積である．このような場合には，有界でない I に対しては $\Phi(I)=\infty$ となる．一方 $f_1(\lambda), \cdots, f_N(\lambda)$ がすべて<u>有界</u>な函数（たとえば $f(\lambda)=\mathrm{Arctan}\lambda$）なら $\Psi(I)$ は有限な値しかとらない．

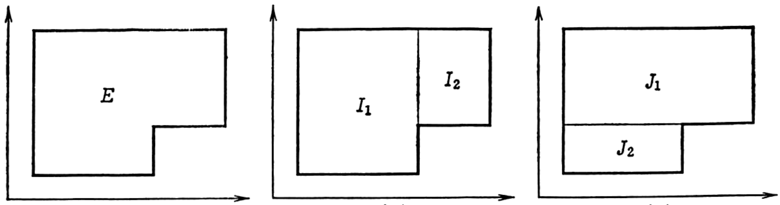
例 3. $\mathfrak{I}=\mathfrak{I}_N$ とし，$\Psi(I)$ $(I\in\mathfrak{I}_N)$ を例 2 で述べたものとする．集合 $E\in\mathfrak{I}$ は

$$E=I_1+I_2+\cdots+I_n \quad (I_j\in\mathfrak{I}_N) \tag{3. 1}$$

のように有限個の区間の直和として書けるから，

$$\mu(E)=\Psi(I_1)+\Psi(I_2)+\cdots+\Psi(I_n) \tag{3. 2}$$

と定義するとこれは $\mathfrak{I}_N$- 集合函数であり，$I\in\mathfrak{I}_N$ に対しては $\mu(I)=\Psi(I)$ となる．



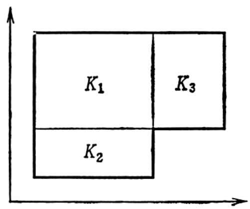
(A)　(B)　(C)

上の $\mu(E)$ の定義が意味をもつためには，(3. 2) の値が E の (3. 1) のような表わし方に無関係なことを証明しなければならない．たとえば上の (A) 図の集合 E は (B) 図のように $E=I_1+I_2$ とも書けるし (C) 図のように $E=J_1+J_2$ とも書ける．このとき

$$\Psi(I_1)+\Psi(I_2)=\Psi(J_1)+\Psi(J_2) \tag{3. 3}$$

が成り立たないと $\mu(E)$ の値が確定しない．この図のような場合には (D) 図のように分割してみると

$$\Psi(I_1)+\Psi(I_2)$$
$$=\{\Psi(K_1)+\Psi(K_2)\}+\Psi(K_3),$$
$$\Psi(J_1)+\Psi(J_2)$$
$$=\{\Psi(K_1)+\Psi(K_3)\}+\Psi(K_2)$$



(D)

となるから，(3. 3) が成り立つ．一般の場合にはこの考え方を拡張して次のように証明される．

$$E=I_1+\cdots+I_n=J_1+\cdots+J_m,$$
$$I_i=(a_{i1}, b_{i1}]\times\cdots\times(a_{iN}, b_{iN}] \quad (i=1, \cdots, n),$$
$$J_j=(a'_{j1}, b'_{j1}]\times\cdots\times(a'_{jN}, b'_{jN}] \quad (j=1, \cdots, m)$$

とする．各 $\nu\,(1\leqq\nu\leqq N)$ に対して

$$a_{i\nu},\ b_{i\nu},\ a'_{j\nu},\ b'_{j\nu} \quad (i=1, \cdots, n;\ j=1, \cdots, m)$$

の中の相異なる数（$\pm\infty$ でもよい）全体を小さい数から順に並べたものを

$$c_{0\nu},\ c_{1\nu},\ c_{2\nu},\ \cdots,\ c_{l_\nu\nu}$$

とし,

$$(3.\ 4)\qquad K(k_1,\ \cdots,\ k_N)=(c_{k_1-1,\,1},\ c_{k_1 1}]\times\cdots\times(c_{k_N-1,\,N},\ c_{k_N N}]$$

なる形の区間 $K(k_1,\ \cdots,\ k_N)$ を考える $(k_\nu=1,\ \cdots,\ l_\nu;\ \nu=1,\ \cdots,\ N)$. このとき E は (3. 4) の形の区間の有限個の直和であるから

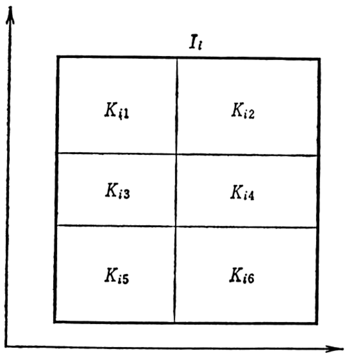
$$E=K_1+\cdots+K_p\quad (\text{各 } K_k \text{ は (3. 4) の形の区間})$$

とする, このとき $p\leqq l_1 l_2\cdots l_N$ である. 各 K_k はどれか一つの I_i に必ず含まれるから, I_i に含まれる K_k の全体を $K_{i1},\ \cdots,\ K_{ik_i}$ とすると E は

$$E=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{k_i}K_{ik}$$

とも書ける. 各 i に対して

$$\Psi(I_i)=\sum_{k=1}^{k_i}\Psi(K_{ik})$$



なることは例2の $\Psi(I)$ の定義から容易にわかる（左図参照）から

$$\Psi(I_1)+\cdots+\Psi(I_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{k_i}\Psi(K_{ik})=\sum_{k=1}^{p}\Psi(K_k).$$

同様にして

$$\Psi(J_1)+\cdots+\Psi(J_m)=\sum_{k=1}^{p}\Psi(K_k)$$

も証明されるから, (3. 3) を一般化したところの

$$\sum_{i=1}^{n}\Psi(I_i)=\sum_{j=1}^{m}\Psi(J_j)$$

が成り立つ.

問 1. $I,\ J$ が R^N の中の区間ならば $I\frown J$ も区間である.

問 2. $A=A_1+A_2$ で $A_1,\ A_2$ が区間塊ならば A も区間塊である.

問 3. 二つの区間塊の交わりは区間塊である.（前§問2と上の問1とを用いよ.）

問 4. 区間の余集合は区間塊である.

ヒント. R^1 の場合は容易である. R^2 の場合は, 区間を $I=I_1\times I_2$ （$I_1,\ I_2$ は R^1 の中の区間）とし, $I_1{}^c=R^1-I_1,\ I_2{}^c=R^1-I_2$ として

$$R^2=(I_1+I_1{}^c)\times(I_2+I_2{}^c)=(I_1\times I_2)+(I_1{}^c\times I_2)+(I_1\times I_2{}^c)+(I_1{}^c\times I_2{}^c)$$

と考える. 右辺の第2項以後の各々が区間塊であることを言えば $I^c=R^2-(I_1\times I_2)$ が区間塊になる. R^N の場合はこの考えを拡張せよ.

問 5. 二つの区間塊の和は区間塊である.（前§問1と上の各問の結果を用いよ.）

II 測　　　　度

§4. 有限加法的測度

Euclid 空間における素朴な意味の‘体積’は，§1 で説明した有限加法性を持っている．この体積の概念を一般化した有限加法的測度（正確な定義は後に述べる）は，完全加法的な測度を構成する途中の段階として重要である．まず，有限加法的測度が定義される集合族としての，有限加法族から説明しよう．

与えられた空間 X の部分集合の族 $\mathfrak{F}$ が

(4. 1)　$\phi\in\mathfrak{F}$,

(4. 2)　$A\in\mathfrak{F}$ ならば $A^c\in\mathfrak{F}$,

(4. 3)　$A, B\in\mathfrak{F}$ ならば $A\cup B\in\mathfrak{F}$

なる三つの条件を満たすとき，$\mathfrak{F}$ を**有限加法族**という．この三つの性質から

(4. 4)　$X\in\mathfrak{F}$,

(4. 5)　$\mathfrak{F}$ に属する集合の和，差，交わりをとる演算を有限回行なって得られる集合は $\mathfrak{F}$ に属する．

((4. 4) は (4. 1) と (4. 2) から明らか．(4. 5) は $A\cap B=(A^c\cup B^c)^c$. $A-B=A\cap B^c$ などによって証明される.)

例 1. Euclid 空間 R^N において $\mathfrak{F}_N$（前§参照）は有限加法族である．このことは前§の問 1 —— 5 によってわかるが，それとは独立に直接次のようにして証明してもよい．まず $N=1$ のときは $\mathfrak{I}_N$, $\mathfrak{F}_N$ の定義から容易にわかる．一般には次の定理 4. 1 を使って N に関する数学的帰納法で証明される．定理 4. 1 の証明は前§問 1——5 の解答と全く同じであるが，この定理はそれ自身としても重要で後に（§9）また使われるから，ここでも証明を与えておく．

定理 4. 1. $Z=X\times Y$（直積空間）とし，$\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ をそれぞれ X, Y の部分集合の有限加法族とすると，Z の部分集合で

(4. 6)　$$K=E\times F\quad(E\in\mathfrak{E},\ F\in\mathfrak{F})$$

なる形の集合の有限個の直和として表わされるものの全体 $\mathfrak{K}$ は有限加法族である．

証明. まず $\phi\in\mathfrak{K}$ なることは明らか（$\phi=\phi\times\phi$, $\phi\in\mathfrak{E}$, $\phi\in\mathfrak{F}$ だから）．また

(4. 7)　$K=E\times F(E\in\mathfrak{E},\ F\in\mathfrak{F})$ ならば $K^c(=Z-K)\in\mathfrak{K}$.

なぜならば

$$Z=(E+E^c)\times(F+F^c)$$
$$=(E\times F)+(E^c\times F)+(E\times F^c)+(E^c\times F^c) \quad (E^c=X-E,\ F^c=Y-F)$$

だから

$$K^c=(E\times F)^c=(E^c\times F)+(E\times F^c)+(E^c\times F^c)\ \in \mathfrak{K}.$$

また

(4. 8) $A=A_1+A_2$ で $A_1, A_2\in\mathfrak{K}$ ならば $A\in\mathfrak{K}$

なることも $\mathfrak{K}$ の定義から明らかである．次に

(4. 9) $A, B\in\mathfrak{K}$ ならば $A\frown B\in\mathfrak{K}$

なることを示そう．$A, B\in\mathfrak{K}$ により

$$\left.\begin{array}{l}A=K_1+K_2+\cdots+K_n\\ B=H_1+H_2+\cdots+H_m\end{array}\right\},\ \text{各 } K_i,\ H_j \text{ は (4. 6) の形の集合},$$

と表わされる．このとき $K_i\frown H_j$ も (4. 6) の形の集合*)であって

$$A\frown B=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}K_i\frown H_j \qquad (\S 2\ \text{問 2 参照})$$

となるから $A\frown B\in\mathfrak{K}$ である．以上のことを使って

(4. 10) $A\in\mathfrak{K}$ ならば $A^c\in\mathfrak{K}$,

(4. 11) $A, B\in\mathfrak{K}$ ならば $A\smile B\in\mathfrak{K}$

を証明しよう．A, B は上の (4. 9) の証明中と同じ式で表わされているとしてよい．そうすると de Morgan の公式 (§2) により

$$A^c=K_1{}^c\frown K_2{}^c\frown\cdots\frown K_n{}^c.$$

ところが (4. 7) により $K_i{}^c\in\mathfrak{K}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ だから，(4. 9) をくりかえし使って

$$K_1{}^c\frown K_2{}^c\frown\cdots\frown K_n{}^c\in\mathfrak{K},$$

すなわち $A^c\in\mathfrak{K}$ となり (4. 10) が得られた．(4. 11) を証明するには

$$A\smile B=A+(B\frown A^c) \qquad (\S 2\ \text{問 1})$$

の右辺に (4. 8), (4. 9), (4. 10) を適用すればよい．(証明終)

次に有限加法的測度の定義を述べる．空間 X とその部分集合の有限加法族 $\mathfrak{F}$ があって，$\mathfrak{F}$- 集合函数 $m(A)$ が

(4. 12) すべての $A\in\mathfrak{F}$ に対して $0\leqq m(A)\leqq\infty$, 特に $m(\phi)=0$,

(4. 13) $A, B\in\mathfrak{F}$, $A\frown B=\phi$ ならば $m(A+B)=m(A)+m(B)$

---

*) 前§の問1と同じようにして証明できる．

を満たすとき，m を（$\mathfrak{F}$ の上の）**有限加法的測度**[*]という．上の二つの性質から

(4. 13′) $$\begin{cases} A_1, \cdots, A_n \in \mathfrak{F},\ A_j \cap A_k = \phi\ (j \neq k) \text{ ならば} \\ m\left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} m(A_j) \qquad \text{（有限加法性）} \end{cases}$$

(4. 14) $$\begin{cases} A,\ B \in \mathfrak{F},\ A \supset B \text{ ならば } m(A) \geqq m(B) \quad \text{（単調性）}, \\ \text{特に } m(B) < \infty \text{ ならば } m(A-B) = m(A) - m(B), \end{cases}$$

(4. 15) $$A_1, \cdots, A_n \in \mathfrak{F} \text{ ならば } m\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leqq \sum_{j=1}^{n} m(A_j) \quad \text{（有限劣加法性）}$$

などが成り立つことは容易に証明される．

問 1. (4. 12), (4. 13) から (4. 13′), (4. 14), (4. 15) を証明せよ．

問 2. 有限加法的測度の定義において，(4. 12) の中の $m(\phi)=0$ のかわりに

(4. 16) 少なくも一つの $A \in \mathfrak{F}$ に対して $m(A) < \infty$

なる条件でおきかえてよいことを示せ．

有限加法族 $\mathfrak{F}$ の上の有限加法的測度 m が条件:

(4. 17) $$\begin{cases} A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{F} \text{（可算無限個）},\ A_j \cap A_k = \phi\ (j \neq k) \text{ のとき} \\ A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{（は } \mathfrak{F} \text{ に属するとは限らないが，もしもこれが）} \in \mathfrak{F} \\ \text{ならば } m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \text{ となる} \end{cases}$$

を満たすとき，m を**有限加法族 $\mathfrak{F}$ の上で完全加法的**な測度という．

例 2. $X=R^N$, $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_N$ とし，m を前§例２，３で定義されたものとする；すなわち，$f_1(\lambda), \cdots, f_N(\lambda)$ を R^1 で単調増加な実数値函数で定数ではないものとし，有界な区間 $I=(a_1, b_1]\times\cdots\times(a_N, b_N]$ $(-\infty<a_\nu<b_\nu<\infty)$ に対して

(4. 18) $$m(I) = \prod_{\nu=1}^{N} \{f_\nu(b_\nu) - f_\nu(a_\nu)\},$$

有界でない区間 I に対しては

(4. 18′) $$m(I) = \sup\{m(J);\ J \text{ は } I \text{ に含まれる任意の有界区間}\}$$

と定義し，空集合 ϕ に対しては $m(\phi)=0$，区間塊 $E=I_1+\cdots+I_n$ に対しては

(4. 19) $$m(E) = m(I_1) + \cdots + m(I_n)$$

と定義する．この m は $\mathfrak{F}_N$ の上の有限加法的測度である．

このことの証明も，厳密に言えば，前の§の最後に述べたところの (3. 2) の値が E の (3. 1) のような表わし方に関係しないことを使うのである．

---

[*] または **Jordan**（ジョルダン）測度ともいう．

この例の m が有限加法族 $\mathfrak{J}_N$ の上で完全加法的になるための条件は次の定理で与えられる．従って特に $f_\nu(\lambda)=\lambda$ のとき（このとき (4. 18), (4. 19) により m が普通の意味の体積になる）は $\mathfrak{J}_N$ の上で完全加法的である．

定理 4. 2. 上の例2の m が $\mathfrak{J}_N$ の上で完全加法的であるための必要十分条件は，すべての $f_\nu(\lambda)$ が右連続*) なことである．

証明．必要なこと．$f_1(\lambda)$ が右連続なことを証明するには，任意の実数 a と

$$\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_n>\cdots>a,\ \lim_{n\to\infty}\lambda_n=a$$

なる任意の実数列 $\{\lambda_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f_1(\lambda_n)=f_1(a)$ となることを言えばよい．各 ν に対して，$f_\nu(\lambda)$ が定数でないから $-\infty<f_\nu(a_\nu)<f_\nu(b_\nu)<\infty$ なる a_ν, b_ν $(a_\nu<b_\nu)$ がある．

$$I_n=(\lambda_{n+1},\ \lambda_n]\times(a_2,\ b_2]\times\cdots\times(a_N,\ b_N],$$
$$I=(\vec{a},\ \lambda_1]\times(a_2,\ b_2]\times\cdots\times(a_N,\ b_N]$$

とおくと $I, I_n\in\mathfrak{J}_N\subset\mathfrak{J}_N$, $I=\sum_{n=1}^{\infty} I_n$ だから，m が $\mathfrak{J}_N$ の上で完全加法的なことにより

$$m(I)=\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} m(I_k).$$

今 $M=\prod_{\nu=2}^{N}\{f_\nu(b_\nu)-f_\nu(a_\nu)\}$ とおくと $M>0$ で，上の式において

$$m(I)=M\{f_1(\lambda_1)-f_1(a)\},\ m(I_k)=M\{f_1(\lambda_k)-f_1(\lambda_{k+1})\}.$$

だから

$$f_1(\lambda_1)-f_1(a)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\{f_1(\lambda_k)-f_1(\lambda_{k+1})\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{f_1(\lambda_1)-f_1(\lambda_n)\};$$

すなわち $f_1(a)=\lim_{n\to\infty} f_1(\lambda_n)$.

$f_2(\lambda)$, $\cdots$, $f_N(\lambda)$ の右連続なことも同様にして証明される．

十分なこと．証明を4段にわける．

(第1段) 任意の $I\in\mathfrak{J}_N$ と任意の $\alpha<m(I)$**) に対して，有界な $J\in\mathfrak{J}_N$ で

---

*) 函数 $f(\lambda)$ が点 λ_0 において $\lim_{\lambda\to\lambda_0+0} f(\lambda)=f(\lambda_0)$ を満たすとき $f(\lambda)$ は λ_0 で右連続であるという．$f(\lambda)$ が $-\infty<\lambda<\infty$ で（或いは，それが定義されているすべての点で）右連続であるとき，単に $f(\lambda)$ は右連続であるという．

**) '$m(I)$ より小さい任意の α' の意味である．$m(I)=\infty$ のときは α としては任意に大きい実数をとれる．

$$\bar{J}\subset I,^{*)}\ m(J)>\alpha$$

となるものが存在する．証明：$I=(a_1,\ b_1]\times\cdots\times(a_N,\ b_N]$ とする．各 $\nu(=1,\ \cdots,\ N)$ に対して数列 $\{a_{\nu n};\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ を

$$b_\nu>a_{\nu1}>a_{\nu2}>\cdots>a_{\nu n}>\cdots>a_\nu,\ \lim_{n\to\infty} a_{\nu n}=a_\nu(\geqq-\infty)$$

なるようにとり，また数列 $\{b_{\nu n};\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ を

$b_\nu<\infty$ ならば $b_{\nu n}=b_\nu$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ と定義し，

$b_\nu=\infty$ ならば $a_{\nu1}<b_{\nu1}<b_{\nu2}<\cdots<b_{\nu n}<\cdots<\infty,\ \lim_{n\to\infty} b_{\nu n}=\infty$ なるように定める．$I_n=(a_{1n},\ b_{1n}]\times\cdots\times(a_{Nn},\ b_{Nn}]$ とおくと $\bar{I}_n\subset I$ であって，m の定義 (4. 18), (4. 18′) と，$f_\nu(\lambda)$ の右連続なことにより $\lim_{n\to\infty} m(I_n)=m(I)$．だから n を十分大きくとれば $m(I_n)>\alpha$；この I_n を J とすればよい．

(第2段) 任意の $E\in\mathfrak{F}_N$ と任意の $\alpha<m(E)$ に対して，有界な $F\in\mathfrak{F}_N$ で

$$\bar{F}\subset E,\ m(F)>\alpha$$

となるものが存在する．証明：$E\in\mathfrak{F}_N$ は $E=I_1+\cdots+I_n\,(I_j\in\mathfrak{F}_N)$ と表わされる．まずすべての j に対して $m(I_j)<\infty$ のときは，第1段により各 j に対して有界な $J_j\in\mathfrak{F}_N$ で

$$\bar{J}_j\subset I_j,\ m(J_j)>m(I_j)-\frac{1}{n}\{m(E)-\alpha\}$$

となるものがある．$I_1,\ \cdots,\ I_n$ がどの二つも互いに素だから $J_1,\ \cdots,\ J_n$ も互いに素であり，$F=J_1+\cdots+J_n$ とおくとこれは有界で $F\in\mathfrak{F}_N$．しかも

$$\bar{F}=\bar{J}_1+\cdots+\bar{J}_n\subset I_1+\cdots+I_n=E,$$

$$m(F)=\sum_{i=1}^{n} m(J_j)>\sum_{j=1}^{n} m(I_j)-\{m(E)-\alpha\}=\alpha$$

となるから F は求めるものである．次に $m(I_j)=\infty$ なる j があるとき，例えば $m(I_1)=\infty$ とすると第1段により有界な $J_1\in\mathfrak{F}_N$ で

$$\bar{J}_1\subset I_1,\ m(J_1)>\alpha$$

なるものがある．$F=J_1$ とすれば $\bar{F}\subset I_1\subset E,\ m(F)>\alpha$ となる．

(第3段) $E\in\mathfrak{F}_N,\ I_n\in\mathfrak{F}_N\,(n=1,\ 2,\ \cdots),\ E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ ならば

(4. 20)
$$m(E)\leqq\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n).$$

*) $\bar{J}$ は J の閉包を表わす．付録 §1 参照．

証明: 各 I_n は $I_n=(a_{n1}, b_{n1}]\times\cdots\times(a_{nN}, b_{nN}]$ なる形だから, $f_\nu(\lambda)$ の右連続なことにより, 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta_n>0$ を適当にとって

$$J_n=(a_{n1}, b_{n1}+\delta_n]\times\cdots\times(a_{nN}, b_{nN}+\delta_n]$$

($b_{n\nu}=\infty$ のときは $b_{n\nu}+\delta_n=\infty$) なる区間が

(4. 21) $$m(J_n)\leqq m(I_n)+\varepsilon/2^n \qquad (\text{両辺とも}\infty\text{のこともある})$$

を満たすようにできる. 次に第2段により, 任意の $\alpha<m(E)$ に対して有界な $F\in\mathfrak{F}_N$ で

(4. 22) $$\bar{F}\subset E,\quad m(F)>\alpha$$

なるものがある. ここで $G_n=(a_{n1}, b_{n1}+\delta_n)\times\cdots\times(a_{nN}, b_{nN}+\delta_n)$ (開区間) とおくと

$$\bar{F}\subset E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$

$\bar{F}$ は有界閉集合で G_n はすべて開集合だから, Borel-Lebesgue の被覆定理 (付録 §2, 定理 1) により, 適当な n_0 をとれば

$$F\subset\bar{F}\subset\bigcup_{n=1}^{n_0} G_n\subset\bigcup_{n=1}^{n_0} J_n.$$

だから, m の単調性 (4. 14), 有限劣加法性 (4. 15) と (4. 21), (4. 22) により

$$\alpha<m(F)\leqq\sum_{n=1}^{n_0} m(J_n)\leqq\sum_{n=1}^{n_0}\left\{m(I_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}\right\}\leqq\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n)+\varepsilon.$$

ここで ε は任意の正数であり, α は $m(E)$ にどれだけでも近くとれるから (4. 20) が成り立つ.

(第4段) m が $\mathfrak{F}_N$ の上で完全加法的なことの証明. E, $E_n\in\mathfrak{F}_N$ ($n=1, 2, \cdots$), $E=\sum_{n=1}^{\infty} E_n$ とすると

$$E_n=I_{n1}+\cdots+I_{nk_n}\quad (I_{nj}\in\mathfrak{F}_N;\ j=1, \cdots, k_n)$$

と表わされて

$$m(E_n)=\sum_{j=1}^{k_n} m(I_{nj})$$

である. このとき

$$E=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k_n} I_{nj}$$

だから, 第3段により

(4. 23) $$m(E)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k_n} m(I_{nj})=\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

一方, 任意の p に対して $E\supset\sum_{n=1}^{p} E_n$ だから, m の単調性と有限加法性とにより

$$m(E) \geqq \sum_{n=1}^{p} m(E_n)$$

となる．$p\to\infty$ の極限をとれば

(4. 24) $$m(E) \geqq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

を得る．(4. 23) と (4. 24) とから $m(E)=\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$. これで定理 4. 2 の証明が終った．

上の例 2 において $f_\nu(\lambda)=\lambda$ $(\nu=1, \cdots, N)$ ならば，対応する m は次の二つの性質をもつ：

(4. 25) $I_0=(0, 1]\times\cdots\times(0, 1]$ (単位立方体) に対しては $m(I_0)=1$,

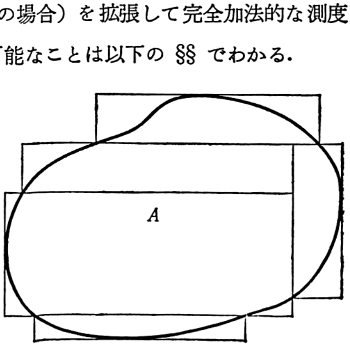
(4. 26) $\begin{cases} \text{集合 } E\in\mathfrak{F}_N \text{ をベクトル } x \text{ だけ平行移動したものを } [E+x] \text{ と書くとき} \\ m([E+x])=m(E). \end{cases}$

逆に次の問 3 の事実が成立する：

問 3. $\mathfrak{F}_N$ の上の有限加法的測度 m が (4. 25), (4. 26) を満たすならば，m は例 2 において $f_\nu(\lambda)=\lambda$ $(\nu=1, \cdots, \cdots, N)$ としたもので与えられる．(注意．有限加法的測度 m とは (4. 12). (4. 13) を満たす集合函数のことであったから，それがはじめから N 個の函数 $f_1(\lambda), \cdots, f_N(\lambda)$ によって例 2 の形に書かれていることは仮定しない．)

問 4. m を前問のとおりとし，また集合 $E\in\mathfrak{F}_N$ に対して $[-E]=\{-x\colon x\in E\}$ とすると，任意の $\varepsilon>0$ に対して $[-E]\subset F$, $m(F)\leqq m(E)+\varepsilon$ なる $F\in\mathfrak{F}_N$ が存在することを示せ．(まず一つの区間について証明せよ．なお，$E\in\mathfrak{F}_N$ でも $[-E]\notin\mathfrak{F}_N$ なることに注意；例えば R^1 において $I=(a, b]\in\mathfrak{F}_1\subset\mathfrak{F}_1$, $[-I]=[-b, -a)\notin\mathfrak{F}_1$.)

我々の目標は §1 で述べたように完全加法性を持つ測度を構成することである．有限加法的測度 m が完全加法的なものに拡張されるためには，m の定義されている集合の上でも当然完全加法的になっていなければならない．この点で上の定理 4. 2 は意味があるのであり，特に Euclid 空間本来の体積 ($f_\nu(\lambda)=\lambda$ の場合) を拡張して完全加法的な測度を構成し得る可能性を示している．実際にそれが可能なことは以下の §§ でわかる．



平面上の矩形の面積を使って一般の図形 A の面積を定めるには，右の図のように A をいくつかの矩形の和集合で掩ってそれらの矩形の面積の和を考え，いろいろな掩い方に対する矩形の面積の和の下限を A の面積と考えるのが (直観的に言って) 適当であろう．しかし A を有限個の矩形で掩う掩い方を考えるだけでは，

Riemann 積分による面積の定義と同じことになって完全加法的な測度は得られない．だから可算無限個の矩形の和（必ずしも直和でなくてよい）で A を掩うようなすべての掩い方を考え，それらの矩形の面積の和の下限を考えてみる．こうして得られる集合函数（平面上のすべての集合に対して定義せられた）は Riemann 積分の時の上積分のようなものであり，A の外から（A を包む集合で）近似された測度という意味で外測度と呼ばれる．一般の空間の場合も上の考え方を使って外測度を構成するのであるが，これについては次の§でくわしく述べる．

§5. 外　測　度

前§の最後に外測度ということに少し触れておいたが，ここでは新しく一般の空間における外測度の定義から始める．

空間 X のすべての部分集合 A に対して定義された集合函数 $\Gamma(A)$ があって

(5. 1)　$0 \leqq \Gamma(A) \leqq \infty, \quad \Gamma(\phi)=0$　（非負性），

(5. 2)　$A \subset B$ ならば $\Gamma(A) \leqq \Gamma(B)$　（単調性），

(5. 3)　$\Gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n)$　（劣加法性）

なる三つの条件を満たすとき，Γ を **Carathéodory**（カラテオドリ）**外測度**または単に**外測度**という．

このような集合函数 Γ の例は，次に述べる定理 5. 1 によって，前§に例をあげた有限加法的測度から構成することができる．

定理 5. 1. $\mathfrak{F}$ を X の部分集合の有限加法族とし，m を $\mathfrak{F}$ の上の有限加法的測度とする．このとき

i)　任意の $A \subset X$ に対して高々可算無限個の集合 $E_n \in \mathfrak{F}$ で A を掩い（すなわち $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$；このような掩い方は少なくも一つはある，例えば $A \subset X \in \mathfrak{F}$）

$$\Gamma(A)=\inf \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \qquad \left(\begin{array}{l}\text{inf は上に述べたようなすべて} \\ \text{の掩い方に対する下限}\end{array}\right)$$

と定義すると，Γ は外測度である．

ii)　特に m が $\mathfrak{F}$ の上で完全加法的ならば $E \in \mathfrak{F}$ に対しては $\Gamma(E)=m(E)$ となる．（一般には $\Gamma(E) \leqq m(E)$ である．）

証明. i)　Γ が外測度の条件 (5. 1)，(5. 2)，(5. 3) を満たすことを証明すればよい．

(5. 1) の証明: $0\leqq\Gamma(A)\leqq\infty$ は明らか. また $\phi\subset\phi\in\mathfrak{F}$*) だから $\Gamma(\phi)\leqq m(\phi)=0$.

(5. 2) の証明: $A\subset B$ とし B の任意の掩い方 $B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ ($E_n\in\mathfrak{F}$) を考えると, $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ でもあるから

$$\Gamma(A)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n).$$

この右辺の, B のすべての掩い方に対する下限をとれば $\Gamma(A)\leqq\Gamma(B)$ を得る.

(5. 3) の証明: 任意の $\varepsilon>0$ をとるとき, 各 A_n に対して

$$A_n\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}E_{nk},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}m(E_{nk})\leqq\Gamma(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}$$

なる $E_{nk}\in\mathfrak{F}(k=1, 2, \cdots)$ がとれる. このとき $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}E_{nk}$ (すなわち右辺は $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ の掩い方の一つ) であるから

$$\Gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}m(E_{nk})\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\Gamma(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma(A_n)+\varepsilon.$$

ここで ε は任意の正数だから (5. 3) が成り立つ.

ii) $E\in\mathfrak{F}$ ならば, $E\subset E$ を一つの掩い方と考えれば

$$\Gamma(E)\leqq m(E) \tag{5. 4}$$

はいつでも成り立つ. 次に $E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ ($E_n\in\mathfrak{F}$) なる任意の掩い方に対して

$$F_1=E_1\frown E,\qquad F_n=\left(E_n-\bigcup_{k=1}^{n-1}E_k\right)\frown E\qquad (n=2, 3, \cdots)$$

とおくと, $F_1, F_2, \cdots$ はどの二つも互いに素で

$$F_n\subset E_n,\quad F_n\in\mathfrak{F}\qquad (n=1, 2, \cdots),$$

$$E=E\frown\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n,\quad E\in\mathfrak{F}$$

だから, m が $\mathfrak{F}$ の上で完全加法的なら

$$m(E)=\sum_{n=1}^{\infty}m(F_n)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n).$$

ここで E のすべての掩い方に対する右辺の下限をとれば $m(E)\leqq\Gamma(E)$; これと (5. 4) とあわせて $\Gamma(E)=m(E)$ を得る. (証明終)

---

*) $\phi\subset\phi$ だから, 左辺の ϕ を任意の集合 A と考え, 右辺の ϕ を $\mathfrak{F}$ に属する集合と考えるのである.

前§例2において $f_\nu(\lambda)$ が右連続でないときは，$m(E)$ が $\mathfrak{F}$ の上で完全加法的でないから $\Gamma(E)=m(E)$ とは限らない．例えば R^1 において

$$f(\lambda)=\begin{cases}0 & (\lambda\leqq 0 \text{ のとき})\\ 1 & (\lambda>0 \text{ のとき})\end{cases}$$

とすると，$I=(a,\ b]$ に対して

$$m(I)=\begin{cases}1 & (a\leqq 0<b \text{ のとき})\\ 0 & (\text{その他の場合})\end{cases}$$

だから，$E=(0,\ 1]$，$E_n=\left(\dfrac{1}{n+1},\ \dfrac{1}{n}\right]$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とすると，$m(E)=1$，一方 $E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$（$\subset$ は実は $=$ である）で $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)=0$ だから $\Gamma(E)=0$.

R^N において $f_\nu(\lambda)=\lambda$ $(\nu=1,\ \cdots,\ N)$ として前§例2と上の定理 5. 1 との方法で構成した外測度を $\mu^*(A)$ と書き **Lebesgue 外測度**という．この場合は定理 4. 2 と定理 5. 1 の ii) により $I=(a_1,\ b_1]\times\cdots\times(a_N,\ b_N]$ に対して

$$\mu^*(I)=\prod_{\nu=1}^{N}(b_\nu-a_\nu)$$

となる．

次に可測性の概念を導入するため，上の定理 5. 1 の ii) を満たす Γ について次の考察を試みよう．‘可測’とは面積または体積を‘測ることが可能’の意味であるから

(1)　可測な集合の全体が有限加法族をなし，Γ はその上の有限加法的測度である

ことは自然な要求であるが，更に第I章で述べたように

(2)　$A=A_1+A_2+\cdots$(可算無限個) で各 A_n が可測ならば A も可測である

ようにしたい．(1) と (2) とから

(2′) $A=A_1\cup A_2\cup\cdots$(可算無限個) で各 A_n が可測ならば A も可測である

ことが証明される．すなわち $B_1=A_1$，$B_n=A_n-\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)$ $(n=2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと，$A=B_1+B_2+\cdots$(直和) となるが，(1) によって各 B_n は可測，従って (2) により A は可測である．また R^N における Lebesgue 外測度の時は少なくも区間塊は可測であるべきだから，一般の空間においては

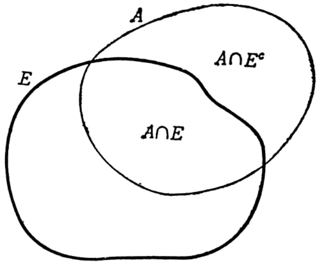
(3)　定理 5. 1 の ii) を満たす外測度 Γ については $\mathfrak{F}$ に属する集合は可測である

ことを要請する．

これらの条件が満たされているとすると，集合 E が可測ならば

(4)　任意の $A\subset X$ に対して $\Gamma(A)=\Gamma(A\cap E)+\Gamma(A\cap E^c)$

が成り立つことを証明しよう．任意の $\varepsilon>0$ に対して，Γ の定義（定理 5. 1 参照）により



$$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)\leqq\Gamma(A)+\varepsilon$$

となる $E_n\in\mathfrak{F}$ $(n=1, 2, \cdots)$ が存在する．

$$H=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$$

とおくと，上の (1), (2′), (3) により H, $H\frown E$, $H\frown E^c$ はすべて可測であって

$$\Gamma(A)+\varepsilon\geqq\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma(E_n)\geqq\Gamma(H)=\Gamma(H\frown E)+\Gamma(H\frown E^c)$$
$$\geqq\Gamma(A\frown E)+\Gamma(A\frown E^c)\geqq\Gamma(A).$$

ここで ε は任意の正数だから (4) が成立する．

こうして，(4) が可測集合を特徴づける一つの必要条件であることがわかった．我々は一般の外測度 Γ があるとき (4) によって‘集合 E が可測’ということを定義して，これから (1), (2), (3) ばかりでなく，多くの自然な性質，有用な性質が出て来ることを示そう．論理体系としては，外測度の定義のすぐ後に，上の (4) を E が可測なことの‘定義’として述べればよいのであるが，突然このような定義を与えることは初学者には奇異な感じを起こさせるかも知れない．上の説明で（十分ではないが）条件 (4) で可測性を定義することの必然性は或る程度了解せられるであろう．さらに先へ進むに従って，この定義が自然であることが，次第にわかってくると思う．

ここで本論にもどって，可測性の定義をくり返して述べよう．

空間 X に外測度 Γ が定義されているとする．集合 $E\subset X$ が次の条件 (5. 5) を満たすとき，E は (**Carathéodory の意味で**) **可測**または **Γ-可測**であるという：

(5. 5)　任意の $A\subset X$ に対して $\Gamma(A)=\Gamma(A\frown E)+\Gamma(A\frown E^c)$.

この条件は次の (5. 5′) と同等である：

(5. 5′)　任意の $A_1\subset E$ と任意の $A_2\subset E^c$ に対して $\Gamma(A_1+A_2)=\Gamma(A_1)+\Gamma(A_2)$.

なぜならば，(5. 5) が成り立つとすると，任意の $A_1\subset E$, $A_2\subset E^c$ に対して $A=A_1+A_2$ に (5. 5) を適用すれば (5. 5′) が得られる．また (5. 5′) が成り立つならば，任意の $A\subset X$ に対して $A_1=A\frown E$ と $A_2=A\frown E^c$ とに (5. 5′) を適用すれば (5. 5) が得られる．

注意. (5. 3) において $A_n=\phi$ $(n\geqq3)$ とおいて (5. 1) を使えば $\Gamma(A_1\smile A_2)\leqq\Gamma(A_1)$

$+\Gamma(A_2)$. だから (5. 5), (5. 5′) において等号のかわりに $\leqq$ としたものは，E が可測であってもなくても成り立つ．だから集合 E が Γ- 可測であることを証明するには，反対向きの不等式 $\geqq$ だけを証明すればよい．このことは今後よく使われる．

Γ- 可測集合の全体を $\mathfrak{M}_\Gamma$ と書く．上の定義から

(5. 6)　$E\in\mathfrak{M}_\Gamma$ ならば $E^c\in\mathfrak{M}_\Gamma$ ((5. 5) により明らか).

(5. 7)　$\Gamma(E)=0$ ならば $E\in\mathfrak{M}_\Gamma$, 従って特に $\phi\in\mathfrak{M}_\Gamma$.

なぜならば，任意の $A\subset X$ に対して (5. 2) により $\Gamma(A\frown E)\leqq\Gamma(E)=0$ だから，$\Gamma(A)\geqq\Gamma(A\frown E^c)=\Gamma(A\frown E)+\Gamma(A\frown E^c)$. だから上の注意により $E\in\mathfrak{M}_\Gamma$.

$\Gamma(E)=0$ なる集合を（Γ に関する）**零集合**という．空集合と混同してはならない．空集合は明らかに零集合であるが，逆は成立しない．

定理 5. 2. 定理 5. 1 の方法で構成された外測度 Γ については $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{M}_\Gamma$ が成立する．

証明. $E\in\mathfrak{F}$ とする．任意の $A\subset X$ に対して $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, $E_n\in\mathfrak{F}$, なる掩い方を考えると，

$$A\frown E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\frown E),\qquad A\frown E^c\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\frown E^c).$$

だから，$E_n=E_n\frown E+E_n\frown E^c$ なることと，m の有限加法性 (4. 13) とにより

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)&=\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n\frown E)+\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n\frown E^c)\\&\geqq\Gamma(A\frown E)+\Gamma(A\frown E^c).\end{aligned}$$

A のすべての掩い方に対する左辺の下限をとれば $\Gamma(A)\geqq\Gamma(A\frown E)+\Gamma(A\frown E^c)$ となるから $E\in\mathfrak{M}_\Gamma$ である．だから $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{M}_\Gamma$. （証明終）

次に Γ を空間 X における任意の外測度として，$\mathfrak{M}_\Gamma$ とその上で考えた Γ の重要な性質を定理として述べよう．

定理 5. 3. $E_k\in\mathfrak{M}_\Gamma$ ($k=1, 2, \cdots$), $E_j\frown E_k=\phi$ ($j\neq k$), $S=\sum_{k=1}^{\infty}E_k$ ならば

$$S\in\mathfrak{M}_\Gamma,\qquad \Gamma(S)=\sum_{k=1}^{\infty}\Gamma(E_k).$$

証明. 任意の $A\subset X$ と任意の n に対して

(5. 8)
$$\Gamma(A)\geqq\sum_{k=1}^{n}\Gamma(A\frown E_k)+\Gamma(A\frown S^c)$$

が証明できたとすると，$n\to\infty$ としてから $\sum_{k=1}^{\infty}(A\frown E_k)=A\frown S$ なることと Γ の劣加法性 (5. 3) とを使って

(5. 9) $$\Gamma(A)\geqq\sum_{k=1}^{\infty}\Gamma(A\frown E_k)+\Gamma(A\frown S^c)\geqq\Gamma(A\frown S)+\Gamma(A\frown S^c).$$

だから $S\in\mathfrak{M}_\Gamma$ である．また (5. 9) において $A=S$ とおくと

$$\Gamma(S)\geqq\sum_{k=1}^{\infty}\Gamma(E_k)\geqq\Gamma(S),$$

すなわち $\Gamma(S)=\sum_{k=1}^{\infty}\Gamma(E_k)$ を得る．

さて (5. 8) は次のように数学的帰納法で証明される．まず $E_1\in\mathfrak{M}_\Gamma$ なることと Γ の単調性 (5. 2) により

$$\Gamma(A)=\Gamma(A\frown E_1)+\Gamma(A\frown E_1{}^c)\geqq\Gamma(A\frown E_1)+\Gamma(A\frown S^c)$$

だから，(5. 8) は $n=1$ のときは成立する．次に (5. 8) が n まで成り立つとすると，A を $A\frown E_{n+1}{}^c$ でおきかえて

(5. 10) $$\begin{aligned}\Gamma(A\frown E_{n+1}{}^c)&\geqq\sum_{k=1}^{n}\Gamma(A\frown E_{n+1}{}^c\frown E_k)+\Gamma(A\frown E_{n+1}{}^c\frown S^c)\\&=\sum_{k=1}^{n}\Gamma(A\frown E_k)+\Gamma(A\frown S^c)\end{aligned}$$

を得る（仮定により $S^c\subset E_{n+1}{}^c$，また $k\leqq n$ ならば $E_k\subset E_{n+1}{}^c$ なることを使った)．ところが $E_{n+1}\in\mathfrak{M}_\Gamma$ だから，

$$\begin{aligned}\Gamma(A)&=\Gamma(A\frown E_{n+1})+\Gamma(A\frown E_{n+1}{}^c)\\&\geqq\Gamma(A\frown E_{n+1})+\sum_{k=1}^{n}\Gamma(A\frown E_k)+\Gamma(A\frown S^c)\qquad\text{((5. 10) により)}\\&=\sum_{k=1}^{n+1}\Gamma(A\frown E_k)+\Gamma(A\frown S^c);\end{aligned}$$

すなわち (5. 8) が $n+1$ に対して成り立つ．（証明終）

定理 5. 4. E, $F\in\mathfrak{M}_\Gamma$ ならば $E-F\in\mathfrak{M}_\Gamma$, $E\frown F\in\mathfrak{M}_\Gamma$.

証明．$E\frown F\in\mathfrak{M}_\Gamma$ を証明すれば，(5. 6) により $E-F=E\frown F^c\in\mathfrak{M}_\Gamma$ となる．だから $E\frown F$ が条件 (5. 5′) を満たすこと，すなわち任意の $A\subset E\frown F$, $B\subset(E\frown F)^c=E^c\smile F^c$ に対して $\Gamma(A)+\Gamma(B)\leqq\Gamma(A+B)$ となることを示せばよい．今

$$B_1=B\frown F,\qquad B_2=B\frown F^c$$

とおくと

(5. 11) $$A\subset E,\ B_1\subset(E^c\smile F^c)\frown F\subset E^c,\ E\in\mathfrak{M}_\Gamma,$$

(5. 12) $$A+B_1\subset F,\ B_2\subset F^c,\ F\in\mathfrak{M}_\Gamma.$$

だから

$$\Gamma(A)+\Gamma(B)\leqq\Gamma(A)+\Gamma(B_1)+\Gamma(B_2) \quad (B=B_1+B_2 \text{ により})$$
$$=\Gamma(A+B_1)+\Gamma(B_2) \quad ((5.\ 11) \text{ により})$$
$$=\Gamma(A+B_1+B_2) \quad ((5.\ 12) \text{ により})$$
$$=\Gamma(A+B). \quad (\text{証明終})$$

系. $E_k\in\mathfrak{M}_\Gamma$ $(k=1, \cdots, n)$ ならば $\bigcup_{k=1}^{n} E_k\in\mathfrak{M}_\Gamma$, $\bigcap_{k=1}^{n} E_k\in\mathfrak{M}_\Gamma$.

証明. 仮定から，上の定理と n に関する数学的帰納法で $\bigcap_{k=1}^{n} E_k\in\mathfrak{M}_\Gamma$ を得る. 従ってまた (5. 6) により，de Morgan の公式 (§2) を使って

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k=\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k{}^c\right)^c\in\mathfrak{M}_\Gamma.$$

定理 5. 5. $E_n\in\mathfrak{M}_\Gamma$ $(n=1, 2, \cdots)$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\in\mathfrak{M}_\Gamma$.

証明.
$$F_1=E_1, \quad F_n=E_n-\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k \quad (n\geqq 2)$$

とおくと，定理 5. 4 とその系とにより $F_n\in\mathfrak{M}_\Gamma$ $(n=1, 2, \cdots)$. そして $j\neq k$ ならば $F_j\frown F_k=\phi$ であり，$\sum_{n=1}^{\infty} F_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ だから，定理 5. 3 により $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\in\mathfrak{M}_\Gamma$. (証明終)

一般に或る集合族が上の二つの定理に述べたような性質を持つとき（完全）加法族といい，測度論の基礎になるのであるが，それについては次の§で述べる.

問 1. Γ を空間 X の上の任意の外測度とすると，任意の $A\subset X$ と Γ-可測な任意の $B\subset X$ に対して $\Gamma(A\smile B)+\Gamma(A\frown B)=\Gamma(A)+\Gamma(B)$. ($\Gamma(A)$ と $\Gamma(A\smile B)$ とを考えよ.)

問 2. 集合 $E\subset R^N$ が可算集合ならば，その Lebesgue 外測度 $\mu^*(E)$ は 0 である.

問 3. R^N において，集合 A をベクトル x だけ平行移動したものを $[A+x]$ と書くとき，$\mu^*([A+x])=\mu^*(A)$ である；また集合 A に対して $[-A]=\{-x;\ x\in A\}$ とするとき，$\mu^*([-A])=\mu^*(A)$ である. (μ^* は Lebesgue 外測度.)

($[A+x]$ については，μ^* の定義と，区間 E を平行移動した $[E+x]$ がまた区間であることを使えばよい. $[-A]$ については，§4 の問 4 を利用せよ.)

§6. 測　度

空間 X の部分集合の族 $\mathfrak{B}$ があって

(6. 1)　$\phi\in\mathfrak{B}$,

(6. 2)　$E\in\mathfrak{B}$ ならば $E^c\in\mathfrak{B}$,

(6. 3)　$E_n \in \mathfrak{B}$ $(n=1, 2, \cdots)$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{B}$

なる三つの条件を満たすとき，$\mathfrak{B}$ を**完全加法族**，**可算加法族**，**σ-加法族**，または単に加**法族***) という．以後本書では σ-加法族と呼ぶことにする．σ-加法族は明らかに有限加法族である．上の三つの条件から，有限加法族の場合と同様にして

(6. 4)　$X \in \mathfrak{B}$,

(6. 5)　$\mathfrak{B}$ に属する集合の和，差，交わりを作る操作を高々可算無限回行なって得られる集合は $\mathfrak{B}$ に属する

ということは容易にわかる．

空間 X とその部分集合の σ-加法族 $\mathfrak{B}$ があって，$\mathfrak{B}$-集合函数 $\mu(A)$ が

(6. 6)　$0 \leqq \mu(A) \leqq \infty$，$\mu(\phi)=0$ (**非負性**),

(6. 7)　$A_n \in \mathfrak{B}$ $(n=1, 2, \cdots)$，$A_j \frown A_k = \phi$ $(j \neq k)$ ならば $\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$　(**完全加法性，可算加法性**)

を満たすとき，μ を $\mathfrak{B}$ で定義された**測度**という．または（$\mathfrak{B}$ を特に示す必要がないとき）X の上の測度ということもある．完全加法性 (6. 7) から有限加法性 (4. 13′) が出ることは明らかである．従って有限加法的測度のときと同様に，上の (6. 6)，(6. 7) から

(6. 8)　$A, B \in \mathfrak{B}$，$A \subset B$ ならば $\mu(A) \leqq \mu(B)$　(単調性), 特に $\mu(A) < \infty$ ならば $\mu(B-A) = \mu(B) - \mu(A)$,

(6. 9)　$A_n \in \mathfrak{B}$ $(n=1, 2, \cdots)$ ならば $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$　(劣加法性)

なることが出る．また (6. 6) の中の $\mu(\phi)=0$ を

(6. 10)　少なくも一つの $A \in \mathfrak{B}$ に対して $\mu(A) < \infty$

なる条件でおきかえてもよい．

空間 X にその部分集合の σ-加法族 $\mathfrak{B}$ と $\mathfrak{B}$ で定義された測度 μ とを組み合せて考えたものを**測度空間**といい，$(X, \mathfrak{B}, \mu)$ または $X(\mathfrak{B}, \mu)$ と書く．

定理 6. 1. Γ を空間 X で定義された外測度とすると，Γ-可測集合の全体 $\mathfrak{M}_\Gamma$ は σ-加法族をなし，Γ は $\mathfrak{M}_\Gamma$ の上で定義された測度である．

証明. $\mathfrak{M}_\Gamma$ が σ-加法族であることは (5. 6)，(5. 7) および定理 5. 3 により，また Γ が $\mathfrak{M}_\Gamma$ で定義された測度の条件を満たすことは (5. 1) と定理 5. 3 により明らかであ

*) ‘加法族’なる言葉は有限加法族のような感じを与えるかも知れないが，現在では有限加法族より完全加法族の方がずっと多く使われるため，後者を単に加法族（additive class）と呼び，前者には‘有限’(finitely) という言葉を必ずつけるのが習慣である．本書では誤解をさけるため σ-加法族ということにした．

る．

R^N における外測度の実例を前§で与えてあるから，上の定理によって σ- 加法族とそこで定義された測度の例が作れる．特に Γ が R^N における Lebesgue 外測度 μ^*（前§参照）であるとき，$\mathfrak{M}_{\mu^*}$ に属する集合を **Lebesgue 可測集合**といい，μ^* を $\mathfrak{M}_{\mu^*}$ の上で考えた測度を単に μ と書いてこれを R^N における **Lebesgue 測度**という．以後 Lebesgue 外測度のときには $\mathfrak{M}_{\mu^*}$ を（$*$ を省略して）$\mathfrak{M}_\mu$ と書くことにする．定理 5. 2 により，区間や区間塊は Lebesgue 可測であってその測度は普通の意味の（N 次元の）体積に等しい（定理 5. 1 の ii) 参照)．だから Lebesgue 測度は体積の概念の拡張といえる．前に述べたような単調増加右連続函数の組 $\{f_1, \cdots, f_N\}$ の作り方は無数にあるから，Lebesgue 測度以外の測度が無数に作れる．もちろんこのような N 個の単調増加函数を使って作られる測度のほかにも無数に多くの測度が考えられる．

測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ が与えられたとし，測度の一般的性質を述べよう．

定理 6. 2. $A_n \in \mathfrak{B}$ $(n=1, 2, \cdots)$ とする．集合列 $\{A_n\}$ が i) 単調増加のとき，または ii) 単調減少で $\mu(A_1)<\infty$ のときは

(6. 11) $\mu(\lim_{n\to\infty} A_n)=\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$,

iii) 一般には

(6. 12) $\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n)\leqq\underline{\lim}_{n\to\infty} \mu(A_n)$,

(6. 13) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)<\infty$ ならば $\mu\left(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n\right)\geqq\overline{\lim}_{n\to\infty} \mu(A_n)$,

(6. 14) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)<\infty$ で $\lim_{n\to\infty} A_n$ が存在するならば $\mu(\lim_{n\to\infty} A_n)=\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

証明． i) $\{A_n\}$ が単調増加ならば $A_n=\sum_{\nu=1}^{n}(A_\nu-A_{\nu-1})$（ただし $A_0=\phi$ とおく），従って $\lim_{n\to\infty} A_n=\sum_{\nu=1}^{\infty}(A_\nu-A_{\nu-1})$ だから，完全加法性により

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu(A_\nu-A_{\nu-1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\mu(A_\nu-A_{\nu-1})=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

ii) $\{A_n\}$ が単調減少ならば $\{A_1-A_n;\ n=1, 2, \cdots\}$ は単調増加で $\lim_{n\to\infty}(A_1-A_n)=A_1-\lim_{n\to\infty} A_n$. だから上に証明した i) と $\mu(A_1)<\infty$ とにより

$$\mu(A_1)-\mu(\lim_{n\to\infty} A_n)=\mu(A_1-\lim_{n\to\infty} A_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_1-A_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{\mu(A_1)-\mu(A_n)\}=\mu(A_1)-\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

従って $\mu(\lim_{n\to\infty} A_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$.

iii) 一般の場合には $B_n=\bigcap_{\nu=n}^{\infty} A_\nu$ とおくと，$\{B_n\}$ は単調増加で $\lim_{n\to\infty} B_n=\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$. だから i) によって

$$\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n)=\lim_{n\to\infty} \mu(B_n)\leqq\underline{\lim}_{n\to\infty} \mu(A_n) \qquad (\because\ B_n\subset A_n),$$

すなわち (6. 12) が成り立つ. (6. 13) を示すには $B_n=\bigcup_{\nu=n}^{\infty} A_\nu$ とおいて，$\{B_n\}$ が単調減少で $\lim_{n\to\infty} B_n=\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$, $\mu(B_1)=\mu\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\right)<\infty$ なることと ii) とを使って，上と同様に計算すればよい. 最後に (6. 14) は (6. 12) と (6. 13) とからすぐわかる.

注意. 上の定理で ii) の条件 $\mu(A_1)<\infty$, iii) の (6. 13), (6. 14) の条件 $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)<\infty$ を除くことはできない. 例えば μ を R^1 における Lebesgue 測度とし $A_n=(n,\ \infty)$ (無限区間) とすると，$\{A_n\}$ は単調減少で $\lim_{n\to\infty} A_n=\phi$. そしてすべての n に対して $\mu(A_n)=\infty$ だから $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)=\infty$, 一方 $\mu(\lim_{n\to\infty} A_n)=\mu(\phi)=0$ である.

集合 $E\in\mathfrak{B}$ の点に関係した命題があって，それが $\mu(E_0)=0$ なる集合 $E_0(\subset E)$ の点以外のすべての点で成立するとき，その命題は E の上で μ に関して**ほとんどいたる所**，または**ほとんどすべての**点 $x\in E$ に対して成立するという. 'ほとんどいたる所', 'ほとんどすべての $x\in E$' をそれぞれ 'a. e.' (=almost everywhere), 'a. e. $x\in E$' (=almost every $x\in E$) または 'a. a. $x\in E$' (=almost all $x\in E$) と書く. 例えば $X=E=R^1$, μ を Lebesgue 測度とし，有理点の全体を E_0 とすると，$\mu(E_0)=0$ (前§問 2) だから,

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\ \text{が有理数のとき})\\ 0 & (x\ \text{が無理数のとき})\end{cases}$$

なる函数 $f(x)$ は R^1 でほとんどいたる所 (或いはほとんどすべての $x\in R^1$ に対して) 0 であるといい

$$f(x)=0\ \ (\mu\text{-a. e.}), \qquad f(x)=0\ \ (\text{a. e.}),$$
$$f(x)=0\ \ (\mu\text{-a. e. } x\in R^1), \qquad f(x)=0\ \ (\text{a. a. } x\in E)$$

などと書く.

(上の函数 $f(x)$ は **Dirichlet** (ディリクレ) **の函数**と呼ばれる.)

次に R^N における Borel (ボレル) 集合族を定義するため，次の一般的考察をする.

定理 6. 3. 空間 X の部分集合から成る任意の集合族 $\mathfrak{A}_0$ に対して，$\mathfrak{A}_0$ を含む最小の σ-加法族 $\mathfrak{B}_0$ が存在する. (最小とは，$\mathfrak{A}_0$ を含む任意の σ-加法族 $\mathfrak{B}$ に対して $\mathfrak{B}\supset\mathfrak{B}_0$ となることである.) このような $\mathfrak{B}_0$ を $\mathfrak{B}[\mathfrak{A}_0]$ と書くことがある.

証明. $\mathfrak{A}_0$ を含む σ-加法族は少なくも一つは存在する. 例えば X のすべての部分集合

からなる集合族はそうである．$\mathfrak{A}_0$ を含む σ- 加法族 $\mathfrak{B}$ の全体 $\{\mathfrak{B}\}$ を考え，それらすべての共通部分 $\bigcap_{\{\mathfrak{B}\}} \mathfrak{B}$ を $\mathfrak{B}_0$ とすれば，これが σ- 加法族の条件を満たすことは容易にわかる．また $\mathfrak{B}_0$ が $\mathfrak{A}_0$ を含む σ- 加法族のうち最小のものであることも明らかである．

上の証明の中で'σ- 加法族の全体 $\{\mathfrak{B}\}$'なるものは最初はわかりにくいかと思うが，この証明にはあまりこだわらないで，とにかく $\mathfrak{A}_0$ を含む最小の σ- 加法族 $\mathfrak{B}[\mathfrak{A}_0]$ なるものを考え得ることを（素朴な概念ででも）認識すればよい．重要なのは'最小の'ということの使い方である．その例としては次の定理 6. 4 の証明（脚注を付けた所）を見られたい．

Euclid 空間 R^N の中の開集合（付録§1）の全体を含む最小の σ- 加法族を R^N における **Borel 集合族**といい，本書では $\mathfrak{B}_N$ と書くことにする．$\mathfrak{B}_N$ に属する集合を **Borel 集合**と呼ぶ．開集合の全体を $\mathfrak{O}_N$ とすると，上に述べた記号で書けば $\mathfrak{B}_N=\mathfrak{B}[\mathfrak{O}_N]$ となる．閉集合の余集合は開集合であり，開集合の余集合は閉集合である（付録§1）から，Borel 集合族 $\mathfrak{B}_N$ は閉集合の全体を含む最小の σ- 加法族として定義してもよい．更に次の定理が成り立つ．

定理 6. 4. $\mathfrak{J}_N$, $\mathfrak{F}_N$ をそれぞれ R^N における区間，区間塊（§3 参照）の全体とすると $\mathfrak{B}_N=\mathfrak{B}[\mathfrak{F}_N]=\mathfrak{B}[\mathfrak{J}_N]$ である．

証明. まず $\mathfrak{F}_N\supset\mathfrak{J}_N$ だから $\mathfrak{B}[\mathfrak{F}_N]\supset\mathfrak{B}[\mathfrak{J}_N]$ は明らか．次に任意の $E\in\mathfrak{F}_N$ は

$$E=I_1+\cdots+I_n \quad (I_k\in\mathfrak{J}_N;\ k=1,\ \cdots,\ n)$$

と書けるから $E\in\mathfrak{B}[\mathfrak{J}_N]$．だから $\mathfrak{F}_N\subset\mathfrak{B}[\mathfrak{J}_N]$．この右辺は σ- 加法族であって $\mathfrak{F}_N$ を含んでいるから $\mathfrak{B}[\mathfrak{F}_N]\subset\mathfrak{B}[\mathfrak{J}_N]$*)．だから $\mathfrak{B}[\mathfrak{F}_N]=\mathfrak{B}[\mathfrak{J}_N]$ となる．

次に $\mathfrak{B}_N\equiv\mathfrak{B}[\mathfrak{O}_N]$ が $\mathfrak{B}[\mathfrak{J}_N]$ に一致することを示そう．まず任意の $I\in\mathfrak{J}_N$ は

$$I=(a_1,\ b_1]\times\cdots\times(a_N,\ b_N]$$

と書ける．$n=1, 2, \cdots$ に対して

$$b_{\nu n}=b_\nu+\frac{1}{n} \quad (\nu=1,\ \cdots,\ N)$$

とおくと，$J_n=(a_1,\ b_{1n})\times\cdots\times(a_N,\ b_{Nn})$ は開集合で $I=\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ だから $I\in\mathfrak{B}[\mathfrak{O}_N]$．よって $\mathfrak{J}_N\subset\mathfrak{B}[\mathfrak{O}_N]$，従って前と同様の論法で $\mathfrak{B}[\mathfrak{J}_N]\subset\mathfrak{B}[\mathfrak{O}_N]$．次に任意の $G\in\mathfrak{O}_N$ をとる

---

*) 一般に $\mathfrak{A}$ が任意の集合族，$\mathfrak{B}$ が σ- 加法族で $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}$ ならば，$\mathfrak{B}[\mathfrak{A}]\subset\mathfrak{B}$ である．なぜならば，$\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{A}$ を含む σ- 加法族であり，一方 $\mathfrak{B}[\mathfrak{A}]$ は $\mathfrak{A}$ を含む最小の σ- 加法族だからである．この論法は測度論，積分論において重要な論法であって本書でも今後よく使われるから，その意味を十分理解せられたい．

と，任意の点 $x\in G$ に対して x を内部に含みしかも G に含まれる区間 I_x がある．各 $I_x\in\mathfrak{J}_N$ は

$$I_x=(a_{x1},\ b_{x1}]\times\cdots\times(a_{xN},\ b_{xN}]$$

なる形だから，これに対して

$$J_x=(a_{x1},\ b_{x1})\times\cdots\times(a_{xN},\ b_{xN})$$

とすると J_x は開集合で $x\in J_x$，従って $\bigcup_{x\in G}J_x\supset G$ だから Lindelöf の被覆定理（付録 §2, 定理 2）により可算個の点 $x_1,\ x_2,\ \cdots\ (\in G)$ が存在して

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}J_{x_n}\supset G,\quad \text{従って}\ \bigcup_{n=1}^{\infty}I_{x_n}\supset G.$$

一方各 x_n に対して $I_{x_n}\subset G$ だから $\bigcup_{n=1}^{\infty}I_{x_n}\subset G$．だから $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_{x_n}\in\mathfrak{B}[\mathfrak{J}_N]$．よって $\mathfrak{O}_N\subset\mathfrak{B}[\mathfrak{J}_N]$ であるから前と同様にして $\mathfrak{B}[\mathfrak{O}_N]\subset\mathfrak{B}[\mathfrak{J}_N]$．こうして $\mathfrak{B}[\mathfrak{O}_N]=\mathfrak{B}[\mathfrak{J}_N]$ が示された．（証明終）

一般の空間 X においてその部分集合の σ-加法族 $\mathfrak{B}$ が与えられているとき，$\mathfrak{B}$ を X における **Borel 集合族**と呼び，$\mathfrak{B}$ に属する集合を **Borel 集合**または $\mathfrak{B}$-**可測集合**と呼ぶことがある．この場合，Euclid 空間における Borel 集合族（本書で $\mathfrak{B}_N$ と書いているもの）や，それに属する集合（すなわち本来の Borel 集合）とは意味が違うから，他の書物を読まれるときには注意せられたい．また，空間 X に σ-加法族 $\mathfrak{B}$ を組合せた $(X,\ \mathfrak{B})$ を，**Borel 空間**または**可測空間**と呼ぶ．‘可測’という形容詞がつけられる理由は後にわかる（§10）．

ここで述べた Borel 集合族（すなわち σ-加法族）のことを **Borel 集合体**または **σ-algebra***) などとも言う．現在ではこれらの用語の方が普及しつつあるようであるが，これらの（抽象代数から，少しく意味がはずれて来た）用語は，数学専攻者以外をも対象とする本シリーズの趣旨には必ずしも適当でないと思われるので，しばらく（古典的な？）加法族という言葉を残すことにした．

測度空間 $(X,\ \mathfrak{B},\ \mu)$ において，X が μ 測度有限な集合の可算個の和になっている場合，すなわち

$$X=\bigcup_{k=1}^{\infty}X_k,\qquad X_k\in\mathfrak{B},\qquad \mu(X_k)<\infty \tag{6. 11}$$

が成立しているとき，この測度空間は σ-**有限**であるということがある．また，測度空間といえば必ずこの条件 (6. 11) を満たしているものと仮定した書物もある．Euclid 空間

*) 直訳すれば‘σ-代数’となるが，普通‘σ-algebra’のまま使われている．

における普通の Lebesgue 測度は，この条件を満たしている（X_k として，例えば，中心が原点で半径が k の球の内部を考えればよい）．積分論の本質的な部分は（特に入門書としては）いつもこの条件を仮定しておいてもよいのである．しかし理論の或る段階は，この条件に無関係に述べることができるし，将来進んで他の書物を読まれる場合も考えて，本書では最初はこの条件をつけないことにした．そして，条件 (6. 11) が本質的に必要な場合や，この条件が（なくてもほとんど同じ議論はできるけれども）ないために pathological（病的）な例外が起ったり，本質的でない複雑さをいたずらに増大して，初学者をかえって疲労させる恐れがある場合にだけこの条件をつけることにし，そのたびに一々この条件を書くことにする．

以下の問（ただし問5を除く）においては，測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ が与えられているものとする．

問 1. $\mu(X)=1$ であって，可算個の集合 $A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{B}$ がすべて $\mu(A_n)=1$ を満たすならば $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)=1$ である．

問 2. $\mu(X)<\infty$ ならば，$\{x\} \in \mathfrak{B}$ で $\mu(\{x\})>0$ なる点 x は高々可算無限個しかない．（$\{x\}$ は一点 x から成る集合を表わす．）

問 3. $A_n \in \mathfrak{B}$ $(n=1, 2, \cdots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)<\infty$ ならば

$$\mu(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n)=0, \quad \mu(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n{}^c)=\mu(X)$$

となる．（特に $\mu(X)=1$ の場合は，確率論で **Borel-Cantelli**（ボレル-カンテリ）**の定理**と呼ばれるものの一部分である．）

問 4. 任意の集合 $A\subset X$ に対して $\mu^*(A)=\inf_{A\subset B\in\mathfrak{B}} \mu(B)$ と定義すると，μ^* は外測度の性質を満たす．

問 5. R^N におけるすべての有界な閉区間を含む最小の σ-加法族は $\mathfrak{B}_N$ に一致する．

§7. Lebesgue 測度の性質

R^N における Lebesgue 外測度 μ^*，Lebesgue 測度 μ の性質について述べよう．以下この§では Lebesgue 可測集合のことを単に可測集合と呼ぶ．なお以下の各定理のうちで定理 7. 1 の他は，Lebesgue 測度でなくても，$\mathfrak{J}_N$ の上で完全加法的な測度 m で任意の有界な $I\in\mathfrak{J}_N$ に対しては $m(I)<\infty$ となるものから定理 5. 1 の方法で構成した外測度 Γ，およびそれを $\mathfrak{M}_\Gamma$ の上で考えた測度に対しては成立する．

まず Lebesgue(外)測度に特有の性質として

定理 7. 1（**Lebesgue 測度の不変性**）．集合 $A\subset R^N$ に対して $[A+x]=\{y+x;$

$y\in A\}$ (A をベクトル x だけ平行移動したもの), $[-A]=\{-y;\, y\in A\}$ (原点に関して A と'対称'な図形) とすると, $\mu^*([A+x])=\mu^*([-A])=\mu^*(A)$. 従って $E\in\mathfrak{M}_\mu$ ならば $[E+x]\in\mathfrak{M}_\mu$, $[-E]\in\mathfrak{M}_\mu$ であって $\mu([E+x])=\mu([-E])=\mu(E)$.

証明. 前半は §5 の問 3 である. だから $E\in\mathfrak{M}_\mu$ ならば $[E+x]\in\mathfrak{M}_\mu$, $[-E]\in\mathfrak{M}_\mu$ となることを証明すればよい. $E\in\mathfrak{M}_\mu$ とすると, 任意の $A\subset R^N$ に対して

$$\mu^*([A-x])=\mu^*([A-x]\cap E)+\mu^*([A-x]\cap E^c),$$
$$\mu^*([-A])=\mu^*([-A]\cap E)+\mu^*([-A]\cap E^c).$$

第一の式の各項の集合をベクトル x だけ平行移動し, また第二の式の各項の集合を原点に関してそれぞれ対称な集合でおきかえても, 外測度は変らない (定理の前半) から

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap[E+x])+\mu^*(A\cap[E+x]^c),$$
$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap[-E])+\mu^*(A\cap[-E]^c).$$

これは $[E+x]\in\mathfrak{M}_\mu$, $[-E]\in\mathfrak{M}_\mu$ なることを表わす. (証明終)

次に定理 5. 2 を Lebesgue 測度の場合に適用すれば $\mathfrak{J}_N\subset\mathfrak{M}_\mu$ であるから, $\mathfrak{M}_\mu$ が σ-加法族であることにより $\mathfrak{B}[\mathfrak{J}_N]\subset\mathfrak{M}_\mu$ となる. 一方 $\mathfrak{B}_N=\mathfrak{B}[\mathfrak{J}_N]$ (定理 6. 4) だから

定理 7. 2. R^N における Borel 集合はすべて可測である.

また Lebesgue 外測度が定理 5. 1 の方法で構成されたものであることから, 次の定理が証明される.

定理 7. 3. 任意の $A\subset R^N$ に対して $\mu^*(A)=\inf\{\mu(G);\, G$ は開集合で $G\supset A\}$.

証明. μ^*の構成法により, 任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)\leqq\mu^*(A)+\varepsilon$$

なる $E_n\in\mathfrak{F}_N$ $(n=1, 2, \cdots)$ が存在する. 各 E_n は有限個の区間の直和であり, 区間に対しては μ と m とが一致するから,

$$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\mu(I_n)\leqq\mu^*(A)+\varepsilon$$

なる $I_n\in\mathfrak{J}_N$ $(n=1, 2, \cdots)$ が存在する. 各 I_n は

$$I_n=(a_{n1},\, b_{n1}]\times\cdots\times(a_{nN},\, b_{nN}]$$

なる形だから, $\delta_n>0$ を十分小さくとれば, 開集合

$$G_n=(a_{n1},\, b_{n1}+\delta_n)\times\cdots\times(a_{nN},\, b_{nN}+\delta_n)$$

が $\mu(G_n)\leqq\mu(I_n)+\varepsilon/2^n$ を満たす. $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$ とおくとこれも開集合で

$$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\supset A,$$

$$\mu(G)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(G_n)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\mu(I_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}\right\}<\mu^*(A)+\varepsilon+\varepsilon=\mu^*(A)+2\varepsilon.$$

ここで ε は任意の正数だから $\inf\{\mu(G)\,;\,G$ は開集合で $G\supset A\}\leqq\mu^*(A)$. 一方反対向きの不等式 $\geqq$ は明らかだから，定理の等式が成立する.

系. 任意の $A\subset R^N$ に対して $B\supset A$, $\mu(B)=\mu^*(A)$ なる Borel 集合 B が存在する.

証明. 上の定理により，任意の n に対して $G_n\supset A$, $\mu(G_n)\leqq\mu^*(A)+\dfrac{1}{n}$ なる開集合 G_n がある. $B=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$ とすると B は Borel 集合で，すべての n に対して $A\subset B\subset G_n$, 従って $\mu^*(A)\leqq\mu(B)\leqq\mu(G_n)\leqq\mu^*(A)+\dfrac{1}{n}$. n は任意に大きくとれるから $\mu(B)=\mu^*(A)$ でなければならない. (証明終)

定理 7.4. A が可測集合ならば，任意の $\varepsilon>0$ に対して $G\supset A$, $\mu(G-A)<\varepsilon$ なる開集合 G が存在する.

証明. R^N の原点を中心とする半径 n の球の内部を S_n とする. A が有界なときは $A\subset S_n$ なる n があり，従って $\mu(A)<\infty$ である. 前の定理により $G\supset A$, $\mu(G)<\mu(A)+\varepsilon<\infty$ なる開集合 G が存在して，$\mu(G-A)=\mu(G)-\mu(A)<\varepsilon$ となる. A が有界でないときは，各 n に対して $A_n=A\cap S_n$ とおくと，A_n は有界な可測集合だから $G_n\supset A_n$, $\mu(G_n-A_n)<\varepsilon/2^n$ なる開集合 G_n がある. $G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n$ とおけばこれも開集合で $G\supset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A$, また $G-A\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(G_n-A_n)$ だから

$$\mu(G-A)\leqq\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n-A_n)\right)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(G_n-A_n)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon.$$

系. A が可測集合ならば，$B\supset A$ で $\mu(B-A)=0$ なる Borel 集合 B が存在する.

証明. 上の定理により，任意の n に対して $G_n\supset A$, $\mu(G_n-A)<\dfrac{1}{n}$ なる開集合 G_n がある. $B=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$ とすると B は Borel 集合で $A\subset B\subset G_n$ (すべての n に対して), 従って $\mu(B-A)\leqq\mu(G_n-A)<\dfrac{1}{n}$, n は任意だから $\mu(B-A)=0$.

定理 7.5. A が可測集合ならば，任意の $\varepsilon>0$ に対して $F\subset A$, $\mu(A-F)<\varepsilon$ なる閉集合 F が存在する；特に $\mu(A)<\infty$ ならばこの F として有界閉集合をとれる.

証明. S_n を前の定理の証明で述べたとおりとし，A が有界な場合と一般の場合とに分けて証明する.

i) A が有界な場合は $A\subset S_n$ なる n がある. このとき $\bar{S}_n-A$ も可測集合だから，前の定理により

$$G \supset \bar{S}_n - A,\ \ \mu(G-(\bar{S}_n - A)) < \varepsilon$$

なる開集合 G が存在する．よって $F=\bar{S}_n - G$ は閉集合*)で，$F\subset \bar{S}_n-(\bar{S}_n-A)=A$，従って

$$F\subset A\subset \bar{S}_n\subset G+F.$$

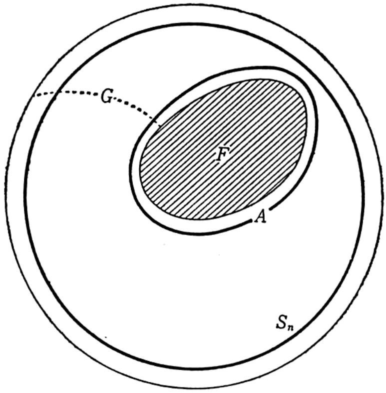
だから

$$G+F\supset(\bar{S}_n-A)+(A-F)+F.$$

従って

$$A-F\subset G-(\bar{S}_n-A)$$

となるから，$\mu(A-F)\leqq\mu(G-(\bar{S}_n-A)) < \varepsilon$ となり，F が求めるものである．



ii) A が有界でないときは，$A_1=A\frown S_1$，$A_n=A\frown(S_n-S_{n-1})$ $(n\geqq 2)$ とおくと，各 A_n は有界な可測集合だから $F_n\subset A_n$，$\mu(A_n-F_n)<\varepsilon/2^n$ なる閉集合 F_n がある．$F=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ とおくとこれも閉集合（付録 §1，問 2）で $F\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A$．また $A-F\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n-F_n)$ だから

$$\mu(A-F)\leqq\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n-F_n)\right)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n-F_n)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon.$$

特に $\mu(A)<\infty$ のときは，定理 6. 2 の ii) により $\lim_{n\to\infty}\mu(A-A\frown S_n)=0$ だから，$\mu(A-A\frown S_n)<\varepsilon/2$ なる n が存在する．$A\frown S_n$ は有界な可測集合だから，$F\subset A\frown S_n$，$\mu(A\frown S_n-F)<\varepsilon/2$ なる有界閉集合 F がある．このとき $\mu(A-F)<\varepsilon$ となるから，F は求めるものである．

系. A が可測集合ならば，$B\subset A$ で $\mu(A-B)=0$ なる Borel 集合 B が存在する．

証明. 定理 7. 4 の系の証明と同じ方法による．すなわち上の定理により，任意の n に対して $F_n\subset A$，$\mu(A-F_n)<\dfrac{1}{n}$ なる閉集合 F_n があるから，$B=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ とすればよい．

一般に，可算個の開集合の交わりとして表わされる集合を **G_δ 集合**，可算個の閉集合の和として表わされる集合を **F_σ 集合**と呼ぶ．上の定理 7. 4 の系，定理 7. 5 の系の B は（Borel 集合であるばかりでなく）それぞれ G_δ 集合，F_σ 集合にとれることは，それらの証明からすぐにわかる．だから

[任意の可測集合]＝[G_δ 集合]－[零集合]＝[F_σ 集合]＋[零集合]**)

*) 付録 §1，問 1.

**) もちろんこの式の中の二つの［零集合］は相異なるものである．

となる．

以上で Lebesgue 測度の主要な性質を述べたが．定理の順序は証明がなるべくわかりやすくできるように配列したつもりである．従って，より一般的な考察をするのには必ずしも適していない．今定理 7. 3 の系までが証明されたものとし，μ^* を一般に次の三つの条件を満たす外測度である（μ^*-可測集合に対しては単に μ と書く）として，定理 7. 4 以後のすべての性質を出してみよう．

(A) すべての Borel 集合は可測である．（定理 7. 2 の性質）

(B) 任意の $A\subset R^N$ に対して $B\supset A$, $\mu(B)=\mu^*(A)$ なる Borel 集合 B が存在する．（定理 7. 3 の系の性質）

(C) A が有界ならば $\mu^*(A)<\infty$.（これはこの § の最初に述べた m に対する条件からすぐ出る——従って Lebesgue 外測度の場合はもちろん成立している——から，すでに定理 7. 4 などの証明にも使っていることである.）

このときまず定理 7. 4 の系を証明する．それには定理 7. 4 の証明（一般の場合）において，各 A_n に対して G_n のかわりに条件 (B) のような Borel 集合 B_n をとって，$B=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ とすればよい．次に定理 7. 5 の系を証明する．これは A が有界な場合を証明すれば，一般の場合の証明は上に述べた定理 7. 4 の系の証明と同じ方法でできる．A が有界なときは，定理 7. 5 の証明において G を $G\supset\bar{S}_n-A$, $\mu(G-(\bar{S}_n-A))=0$ なる Borel 集合とすれば，そこに書いた式そのままで今の場合の証明になっている．（$F=\bar{S}_n-G$ が求める Borel 集合である．なお今の場合は $\bar{S}_n$ を S_n としておいてもよい.）だから

(♯) すべての Borel 集合に対して定理 7. 4 と定理 7. 5 とが成立する

ことがわかれば，任意の可測集合に対してこれらの定理が成り立つことになる．(♯) は次の定理と同じことである*)；なお次の定理が条件 (A), (C) を満たす任意の外測度に対して成立すること（下の証明を見ればわかる）も，それ自身重要なことである．

定理 7. 6. 任意の Borel 集合 B と任意の $\varepsilon>0$ に対して

(7. 1) $F\subset B\subset G$, $\mu(G-F)<\varepsilon$ なる開集合 G と閉集合 F とが存在する．

証明. Borel 集合族 $\mathfrak{B}_N$ の定義により，次の二つのことを証明すれば十分である**)：

i) B が有界閉集合ならば (7. 1) が成立する，

ii) (7. 1) が成立するような Borel 集合 B の全体は σ-加法族をなす．

まず i) を証明しよう．B が有界閉集合なら，有界な開集合の単調減少列 $\{G_n\}$ で B に収束するものがある***)．このとき $\lim_{n\to\infty}\mu(G_n-B)=\lim_{n\to\infty}\mu(G_n)-\mu(B)=0$ だから，$\mu(G_n-B)<\varepsilon$ なる G_n がある．よって $G=G_n$, $F=B$ とすれば (7. 1) が成立する．

---

*) (7. 1) が証明されれば，$\mu(B)<\infty$ のときに F として有界閉集合をとれることは定理 7. 5 の証明の最後の部分と同様にして言える．

**) 前 § の問 5 参照．

***) 付録 §3, 定理 3.

次に ii) を証明するため, (7. 1) が成り立つような Borel 集合 B の全体を $\mathfrak{A}$ とする. $\phi\in\mathfrak{A}$ なることは明らかである. ($G=F=\phi$ とすればよい.) また $A\in\mathfrak{A}$ ならば $A^c\in\mathfrak{A}$ である. なぜならば, $F\subset A\subset G$, $\mu(G-F)<\varepsilon$ なる開集合 G と閉集合 F とをとれば, $F^c\supset A^c\supset G^c$, $\mu(F^c-G^c)=\mu(G-F)<\varepsilon$ であって, F^c は開集合, G^c は閉集合である. 最後に $A_\nu\in\mathfrak{A}(\nu=1, 2, \cdots)$ ならば $A=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}A_\nu\in\mathfrak{A}$ なることを示せばよい. 各 A_ν に対して $F_\nu\subset A_\nu\subset G_\nu$, $\mu(G_\nu-F_\nu)<\varepsilon/2^{\nu+1}$ なる開集合 G_ν と閉集合 F_ν とをとり $G=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}G_\nu$, $H=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}F_\nu$ とおくと, $G-H\subset\bigcup_{\nu=1}^{\infty}(G_\nu-F_\nu)$ だから

$$H\subset A\subset G,\ \mu(G-H)\leqq\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\mu(G_\nu-F_\nu)<\frac{\varepsilon}{2} \tag{7. 2}$$

となる. このとき G は明らかに開集合である. (しかし H は閉集合とは限らないから, 更に次のように考える.) S_n を前に述べたとおりとすると各 n に対して $\bigcup_{\nu=1}^{\infty}(F_\nu\frown(\bar{S}_n-S_{n-1}))=H\frown(\bar{S}_n-S_{n-1})$ (ただし $S_0=\phi$ としておく). だから k_n を十分大きくとれば

$$\mu(H\frown(\bar{S}_n-S_{n-1})-\bigcup_{\nu=1}^{k_n}\{F_\nu\frown(\bar{S}_n-S_{n-1})\})<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \tag{7. 3}$$

$C_n=\bigcup_{\nu=1}^{k_n}\{F_\nu\frown(\bar{S}_n-S_{n-1})\}$ とおくとこれは閉集合*), 従って $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n$ も閉集合**)である. そして (7. 3) により

$$F\subset H,\ \mu(H-F)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(H\frown(\bar{S}_n-S_{n-1})-C_n)<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{7. 4}$$

(7. 2) と (7. 4) とから $F\subset A\subset G$, $\mu(G-F)<\varepsilon$ となるから, $A\in\mathfrak{A}$ である.

問 1. E を $\mu(E)<\infty$ なる Lebesgue 可測集合とすると, ベクトル $x\in R^N$ が 0 に近づくとき $\mu([E+x]\ominus E)\to 0$ となる.

問 2. A, B は共に Lebesgue 可測集合で, A の測度は有限であるとする. このとき $f(x)=\mu([A+x]\frown B)$ $(x\in R^N)$ は x の連続函数である. (前問の結果を使え.)

問 3. $\alpha>2$ ならば, '無数に多くの既約分数 $\dfrac{p}{q}$ (p, q は正の整数) に対して $\left|x-\dfrac{p}{q}\right|<\dfrac{1}{q^\alpha}$ となる' ような実数 x の集合の Lebesgue 測度は 0 である. ($X=(0, 1]$ に対して前 § の問 3 を利用せよ.)

問 4. μ を R^1 の中の $\mathfrak{B}_1$ で定義された測度で, 任意の有界集合 $(\in\mathfrak{B}_1)$ の測度は有限なものとする. 実数 c を任意に固定するとき, 函数 $f_c(x)=\mu([c, x])$ は $[c, \infty)$ で右連続であるが必ずしも連続ではないことを示せ.

問 5. $(R^1, \mathfrak{B}_1)$ の上の測度 μ で, 任意の有界集合の測度は有限なるものがあって, 任意の一点 $x\in R^1$ から成る集合の測度 $\mu(\{x\})$ がいつも 0 のとき, μ を連続な測度とい

---

*) 付録 §1 (特に定理 4 および問 1) 参照.

**) 付録 §1, 問 2 参照.

う．μ が連続な測度であるための必要十分条件は任意の $c\in R^1$ に対して前問の函数 $f_c(x)$ が (c, ∞) で連続なことである．

次の問 6 は集合の‘濃度’の概念が必要であるから，濃度に関して未知の方は省略して進まれてよい．

問 6. μ が $(R^1, \mathfrak{B}_1)$ の上の連続な測度ならば，$\mu(B)>0$ なる集合 $B\in\mathfrak{B}$ は連続体の濃度を持つ．（前問を利用せよ．）このことから特に，E が Lebesgue 可測集合でその Lebesgue 測度が正ならば，E は連続体の濃度を持つ．

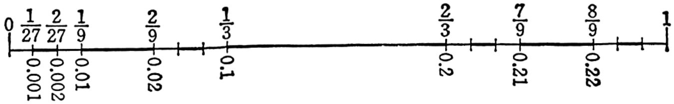
注意. μ が連続な測度なら一点の測度は 0 だから，完全加法性によって可算無限集合の測度は 0 である．従って連続体公理（集合論に関する書物を参照せられたい）を仮定すれば問 6 は自明である．ここではもちろん連続体公理を使わないで問 6 を証明することを要求する．

問 6 の逆は真でない．すなわち連続体の濃度を持った零集合（Lebesgue 測度に関して）が存在する．次に述べる Cantor 集合はその例である．

Cantor（カントル）**集合***)．R^1 における閉区間 $[0, 1]$ を I とする．まず I を三等分してその中央の開区間 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ をとり除くと二つの閉区間 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ が残る．次にこの二つの閉区間の各々を三等分してその中央の開区間 $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ をとり除くと四つの閉区間が残る．その各々を三等分して中央の開区間（4 個）をとり除く．この手続きを限りなく続けると，一般に n 回目には長さ $\frac{1}{3^n}$ の開区間を 2^{n-1} 個とり除くことになる．こうして除かれた可算無限個の区間の和集合を G とすると，G は開集合だから残りの集合 $E=I-G$ は閉集合である．n 回目の手続で除かれる区間の長さ（=Lebesgue 測度）の和は $2^{n-1}\cdot\frac{1}{3^n}$ だから，G の測度：

$$\mu(G)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}=1.$$

従って $\mu(E)=\mu(I)-\mu(G)=0$，すなわち E は零集合である．この集合 E を **Cantor 集合**または **Cantorの零集合**という．



（下の小数は 3 進小数）

---

*) この項（§7 の最後まで）は最初は読まなくてもよい．

次に Cantor 集合 E の上だけで増加する単調増加連続函数 $\varphi(x)$ を構成しよう．閉区間 $[0, 1]$ の点を3進小数で表わすと，第1回目に除かれる開区間は $(0.1, 0.2)$ となり，第2回目に除かれる開区間は $(0.01, 0.02)$，$(0.21, 0.22)$ となる．以下同様にして第 n 回目に除かれる区間は

(7. 5) $$(0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}1,\quad 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}2) \quad (\alpha_j \text{ は } 0 \text{ または } 2)$$

なる形のものすべてである．だから $0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}1$ のかわりに $0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}0222\cdots$（循環小数）と書くことにすると，$E$ に属する点はすべて数字1を持たないような3進小数 $0.\alpha_1\alpha_2\cdots$ で一意的に表わされ，その逆も成り立つ．よって E に属する

$$x=0.\alpha_1\alpha_2\cdots \qquad (3\text{進小数})$$

に対して

$$\alpha_n=0 \text{ ならば } \beta_n=0, \qquad \alpha_n=2 \text{ ならば } \beta_n=1$$

なる2進小数 $0.\beta_1\beta_2\cdots$ を作り

$$\varphi(x)=0.\beta_1\beta_2\cdots \quad (2\text{進小数})$$

と定義すると，すべての $x\in E$ に対して $\varphi(x)$ の値が定まる．このとき，E の構成において‘除かれた’開区間 (7. 5) の両端における $\varphi(x)$ の値は相等しい．何となれば

$$\begin{aligned}\varphi(0.\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}1)&=\varphi(0.\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}0222\cdots)\\&=0.\beta_1\cdots\beta_{n-1}0111\cdots=0.\beta_1\cdots\beta_{n-1}1,\\ \varphi(0.\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}2)&=0.\beta_1\cdots\beta_{n-1}1.\end{aligned}$$

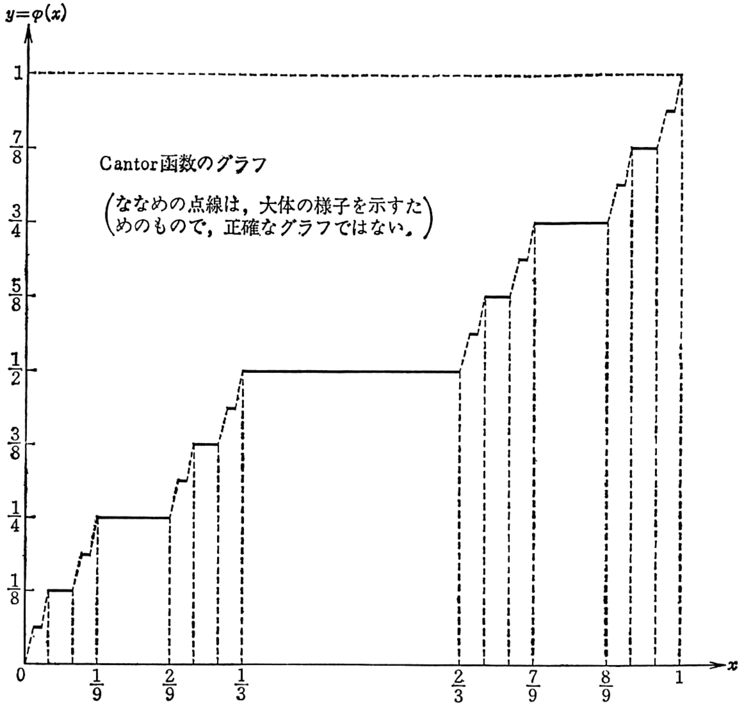
（上の式で $\varphi(\ \cdot\ )$ の中の変数は3進小数，φ の値は2進小数.）よって除かれた開区間の内点 x における $\varphi(x)$ の値はその区間の両端における値に等しいものと定義すると，$\varphi(x)$ は G の中では決して変化しないが $\varphi(0)=0$，$\varphi(1)=1$ なる単調増加函数であり，しかも連続なことが上の定義から容易にわかる．だから $\varphi(x)$ は E の上だけで増加する単調連続函数である．この函数 $\varphi(x)$ を **Cantor 函数**ということがある．

Cantor 函数の定義は直観的には次のようにするとわかりやすい（次の図を参照）．まず集合 E の構成において第1回に除かれる開区間 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ の上で $\varphi(x)=\frac{1}{2}$ とする．次に第2回に除かれる開区間 $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$，$\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ の上でそれぞれ $\varphi(x)=\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ とする．次に第3回に除かれる区間

$$\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right), \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right), \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right), \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$$

の上でそれぞれ $\varphi(x)=\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$ とする．以下同様に続けて行くと I で稠密な集

合 G の上で $\varphi(x)$ の値が定まり，$\varphi(x)$ は G で連続な単調増加函数になるから，I で連続な単調増加函数に自然な方法で拡張できる．



この $\varphi(x)$を使って §4—§5 に述べた方法で外測度 Γ を構成すると E, G はそれぞれ閉集合，開集合だから Γ-可測であって $\Gamma(G)=0$, 従って $\Gamma(E)=1$ である．すなわち Γ は Lebesgue 測度 0 の集合の上にだけ分布している測度である．

Cantor 集合 E は連続体の濃度を持つことを示そう．E の構成で上に述べた‘除かれる’区間の左端になる点の全体を A とすると，A は可算集合である．$x \in E-A$ に Cantor 函数の値 $f(x)$ を対応させると，$E-A$ と $f(x)$ の値の集合すなわち閉区間 $[0, 1]$ とが一対一に対応する．だから $E-A$ は，従って E も連続体の濃度を持つ．

§8. 測度空間の完備化，非可測集合の存在

測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ が与えられたとする．これが特に，§5 に述べたように，ある外測度 Γ から出発して $\mathfrak{B}=\mathfrak{M}_\Gamma$ (Γ-可測集合の全体）とし，その上で Γ を考えたものを μ とした場合には，$\mu(B)=0$ なる $B \in \mathfrak{B}$ の任意の部分集合は $\mathfrak{B}$ に属する．しかし一般

には，集合 $B\in\mathfrak{B}$ が $\mu(B)=0$ であっても，任意の集合 $A\subset B$ が $A\in\mathfrak{B}$ となるとはかぎらない；従って $\mu(A)$ が定義されているとはかぎらない．（もしも $A\in\mathfrak{B}$ なら当然 $\mu(A)=0$ である．）$\mu(B)=0$ なる集合 $B\in\mathfrak{B}$ の部分集合がすべてはじめの σ-加法族 $\mathfrak{B}$ に属するとき，測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ は**完備**であるという（または簡単に測度 μ が完備であるということもある）．

一般の測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ の完備化を定義するため，次の考察をしよう．まず X の部分集合 E で

(8. 1)　$E\ominus B\subset N$, $\mu(N)=0$ なる $B\in\mathfrak{B}$, $N\in\mathfrak{B}$ が存在する

ようなものの全体を $\overline{\mathfrak{B}}$ とすると

定理 8. 1.*) $\overline{\mathfrak{B}}$ は σ-加法族である．

そこで，$E\in\overline{\mathfrak{B}}$ に対して，(8. 1) のような B をとって

(8. 2)
$$\overline{\mu}(E)=\mu(B)$$

と定義する．このとき，別に

$$E\ominus B'\subset N', \quad \mu(N')=0$$

なる $B'\in\mathfrak{B}$, $N'\in\mathfrak{B}$ があれば，$B\ominus B'\subset N\cup N'$ だから $\mu(B\ominus B')=0$, 従って $\mu(B)=\mu(B')$ である．だから $\overline{\mu}(E)$ は (8. 2) によって一意的に定まる．そして

定理 8. 2. $(X, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mu})$ は完備な測度空間である．

ここで，$\overline{\mathfrak{B}}\supset\mathfrak{B}$ なること，および $B\in\mathfrak{B}$ ならば $\overline{\mu}(B)=\mu(B)$ となることは明らかである．よって：

与えられた測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ に対して，(8. 1) を満たす E の全体 $\overline{\mathfrak{B}}$ の上で (8. 2) によって $\overline{\mu}$ を定義して得られる測度空間 $(X, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mu})$ を，$(X, \mathfrak{B}, \mu)$ の**完備化**という．**)

上に定義した $\overline{\mathfrak{B}}$ は，すべての $B\in\mathfrak{B}$ と，$\mu(N)=0$ なる任意の $N\in\mathfrak{B}$ のすべての部分集合を含む σ-加法族のうち，最小のもの（そのような σ-加法族は少なくも (8. 1) のような E を含むから）である．だから $(X, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mu})$ は $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ を完備なものにするための最小限度の拡張である．しかしまた $(X, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mu})$ は，$(X, \mathfrak{B}, \mu)$ の自然な拡張のうちでは，或る意味で最も広いものであるといってもよいことが，後に述べる定理 8. 5 とその系によってわかる．だから $(X, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mu})$ は $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ の完備な拡張としては，自然なただ一つのものである．

---

*) この定理および次の定理の証明は次の頁から述べることにし，ここでは完備化の定義とそれに関連した説明とを先に与える．

**) このときまた，簡単に‘$\overline{\mu}$ は μ の完備化である’ということもある．

さて，前に述べた二つの定理を証明しよう．

定理 8.1 の証明． $\overline{\mathfrak{B}}$ が (6. 1), (6. 2), (6. 3) を満たすことを言えばよい．まず $\phi\in\overline{\mathfrak{B}}$ は明らかである．次に $E\in\overline{\mathfrak{B}}$ ならば

$$E\ominus B\subset N,\qquad \mu(N)=0$$

なる $B,\ N\in\mathfrak{B}$ が存在する．このとき $B^c\in\mathfrak{B}$ であって

$$E^c\ominus B^c=(E^c\cap B)+(B^c\cap E)=E\ominus B\subset N.$$

だから $E^c\in\overline{\mathfrak{B}}$ である．最後に，$E_n\in\overline{\mathfrak{B}}$ $(n=1, 2, \cdots)$, $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ ならば，

$$E_n\ominus B_n\subset N_n,\qquad \mu(N_n)=0$$

なる $B_n,\ N_n\in\mathfrak{B}$ $(n=1, 2, \cdots)$ が存在する．

$$B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n,\qquad N=\bigcup_{n=1}^{\infty}N_n$$

とおくと，$B\in\mathfrak{B}$, $N\in\mathfrak{B}$ であって

$$\mu(N)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(N_n)=0,$$

$$E\ominus B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\ominus B_n)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}N_n=N.$$

よって $E\in\overline{\mathfrak{B}}$ である．（証明終）

ここで次のことに注意しておこう．(8. 1) の $B,\ N$ から

(8. 3)
$$B_1=B\cup N,\quad B_2=B-N$$

とおくと

(8. 4)
$$B_1-B_2\subset N,\quad B_1\supset {E \atop B}\supset B_2$$

である．だから

(8. 5)
$$\mu(B_1-B_2)=0,\quad \mu(B_1)=\overline{\mu}(E)=\mu(B)=\mu(B_2).$$

言いかえれば，$\overline{\mathfrak{B}}$ と $\overline{\mu}$ とを前のように定義したとき，任意の $E\in\overline{\mathfrak{B}}$ に対して (8. 1), (8. 2) を満たす B として

$$B\supset E\quad\text{または}\quad B\subset E$$

となるようなものを，とりなおすことができるのである．

このことを使って：

定理 8.2 の証明． まず $\overline{\mu}$ が $\overline{\mathfrak{B}}$ の上の測度であることを証明する．$0\leqq\overline{\mu}(E)\leqq\infty$ は明らかである．$E_n\in\overline{\mathfrak{B}}$ $(n=1, 2, \cdots)$, $E_j\cap E_k=\phi$ $(j\neq k)$ と仮定し，$E=\sum_{n=1}^{\infty}E_n$ とおく．

このとき，上に述べた注意により，各 n に対して

$$B_n \subset E_n,\quad E_n - B_n \subset N_n,\quad \mu(N_n)=0,\quad \bar{\mu}(E_n)=\mu(B_n)$$

なる B_n, $N_n \in \mathfrak{B}$ がある．そこで

$$B=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \qquad N=\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$$

とおくと，$B \subset E$, $E-B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n - B_n) \subset N$, $\mu(N)=0$ だから

$$\bar{\mu}(E)=\mu(B).$$

そして，$j \neq k$ なら $B_j \cap B_k = \phi$ であって，μ は $\mathfrak{B}$ の上の測度だから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \mu(B) = \bar{\mu}(E).$$

すなわち $\bar{\mu}$ は $\bar{\mathfrak{B}}$ の上の測度である．よって測度空間 $(X, \bar{\mathfrak{B}}, \bar{\mu})$ が完備なことを言えばよい．$A \subset E \in \bar{\mathfrak{B}}$, $\bar{\mu}(E)=0$ とすると，上に述べた注意により

$$B_1 \supset E, \quad \mu(B_1)=\bar{\mu}(E)=0$$

なる $B_1 \in \mathfrak{B}$ が存在する．従って $B_1 \supset A$ であるから，条件 (8. 1) (において $E=A$, $N=B=B_1$ としたもの) が成立し，$A \in \bar{\mathfrak{B}}$ である．(証明終)

前の (8. 3)——(8. 5) で述べたことは有用だから，もう一度定理として書いておこう：

定理 8. 3. 測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ の完備化を $(X, \bar{\mathfrak{B}}, \bar{\mu})$ とすると，任意の $E \in \bar{\mathfrak{B}}$ に対して

$$B_1 \supset E \supset B_2, \quad \mu(B_1 - B_2)=0, \quad \mu(B_1)=\bar{\mu}(E)=\mu(B_2)$$

なる B_1, $B_2 \in \mathfrak{B}$ が存在する．

次に，与えられた測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ において，X が μ 測度有限な集合の可算個の和になっている場合，すなわち

(8. 6)
$$X=\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k, \quad X_k \in \mathfrak{B}, \quad \mu(X_k)<\infty$$

が成立している場合に，その完備化を別の方法で構成しよう．それにより，上に定義した(やや人為的に見えるところの) 完備化が，実は自然な拡張であることが了解せられるであろう．

まず任意の $A \subset X$ に対して $\mu^*(A)=\inf_{A \subset B \in \mathfrak{B}} \mu(B)$ とおくと，μ^* は外測度の条件を満たす (§6, 問 4)．この μ^* を**測度 μ から導かれた外測度**という．このとき μ^*- 可測集合の全体 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_{\mu^*}$ は σ- 加法族をなし，μ^* はそこで定義せられた測度である (定理 6. 1)

が，さらに次の定理が成立する．

定理 8. 4. i) $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{M}$. ii) $E\in\mathfrak{B}$ ならば $\mu^*(E)=\mu(E)$.

証明. i) $E\in\mathfrak{B}$ とし，任意の $A_1\subset E$, $A_2\subset E^c$ をとる．任意の $\varepsilon>0$ に対して，μ^* の定義により

$$B\supset A_1+A_2,\quad \mu(B)\leqq\mu^*(A_1+A_2)+\varepsilon$$

なる $B\in\mathfrak{B}$ がある．このとき $A_1\subset B\frown E\in\mathfrak{B}$, $A_2\subset B\frown E^c\in\mathfrak{B}$ だから

$$\mu^*(A_1)+\mu^*(A_2)\leqq\mu(B\frown E)+\mu(B\frown E^c)=\mu(B)\leqq\mu^*(A_1+A_2)+\varepsilon.$$

ε は任意の正数だから $\mu^*(A_1)+\mu^*(A_2)\leqq\mu^*(A_1+A_2)$. よって $E\in\mathfrak{M}$ である．

ii) $E\in\mathfrak{B}$ ならば $\mu^*(E)=\inf\limits_{E\subset B\in\mathfrak{B}}\mu(B)\leqq\mu(E)$ ($\mu(E)$ も inf を定める役目に参加しているから)．一方 $E\subset B\in\mathfrak{B}$ なる任意の B に対して $\mu(E)\leqq\mu(B)$ だから，左辺を固定して右辺の下限をとれば $\mu(E)\leqq\mu^*(E)$. だから $\mu^*(E)=\mu(E)$ である．(証明終)

この定理により，μ^* は $\mathfrak{B}$ の上の測度 μ を $\mathfrak{M}$ にまで拡張したものであるが，上の定義から，$\mathfrak{M}$ は μ を自然に拡張できる最も広い範囲と言ってよいであろう．このとき $(X,\ \mathfrak{M},\ \mu^*)$ が $(X,\ \mathfrak{B},\ \mu)$ のはじめに定義した完備化であることを示そう．

定理 8. 5. $(X,\ \mathfrak{M},\ \mu^*)$ を上に述べたものとするとき，

i) $A\subset E\in\mathfrak{M}$, $\mu^*(E)=0$ ならば $A\in\mathfrak{M}$ である；

ii) 任意の $E\in\mathfrak{M}$ に対して

$$B_1\supset E\supset B_2,\quad \mu(B_1-B_2)=0$$

なる B_1, $B_2\in\mathfrak{B}$ が存在する．

証明. i) は外測度の性質として明らかである ((5. 7) 参照)．まず ii) を $\mu^*(E)<\infty$ の場合に証明する．このとき，$\mu^*(E)$ の定義により，任意の n に対して

$$E\subset B_n'\in\mathfrak{B},\quad \mu(B_n')\leqq\mu^*(E)+\frac{1}{n}<\infty$$

なる B_n' がある．$B_1=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n'$ とすると $E\subset B_1\in\mathfrak{B}$ であり，すべての n に対して

$$\mu^*(B_1-E)=\mu^*(B_1)-\mu^*(E)\leqq\mu(B_n')-\mu^*(E)\leqq\frac{1}{n}$$

となるから，$\mu^*(B_1-E)=0$ である．従ってまた，上の E を B_1-E でおきかえると，上と同様にして

$$B_1-E\subset B_0\in\mathfrak{B},\quad \mu(B_0)=0$$

なる B_0 がとれる．ここで $B_2=B_1-B_0$ とおくと，$B_2\in\mathfrak{B}$ であって，

$$B_2\subset B_1-(B_1-E)=E,\quad \mu(B_1-B_2)\leqq\mu(B_0)=0$$

となり，ii) が成立する．次に一般の $E \in \mathfrak{M}$ に対して ii) を証明しよう．(8. 6) により $X_k \in \mathfrak{B} \subset \mathfrak{M}$ だから，$E_k = E \cap X_k$ とすると，

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \quad E_k \in \mathfrak{M}, \quad \mu(E_k) < \infty.$$

各 E_k に対して上の結果を適用すると，

$$B_{1k} \supset E_k \supset B_{2k}, \quad \mu(B_{1k} - B_{2k}) = 0$$

なる B_{1k}, $B_{2k} \in \mathfrak{B}$ なるが存在する．ここで

$$B_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{1k}, \quad B_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{2k}$$

とおくと $B_1 \supset E \supset B_2$, $B_1 \in \mathfrak{B}$, $B_2 \in \mathfrak{B}$ なることは明らかであり，また $B_1 - B_2 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_{1k} - B_{2k})$ だから

$$\mu(B_1 - B_2) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{1k} - B_{2k}) = 0$$

となる．よって ii) の証明が終った．

系. 上の $(X, \mathfrak{M}, \mu^*)$ は $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ の完備化 $(X, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mu})$ と一致する．

証明. 上の定理の i) により $(X, \mathfrak{M}, \mu^*)$ は完備な測度空間である．また任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対して，ii) のような B_1, B_2 をとり

$$B = B_1 \text{（または } B = B_2\text{)}, \quad N = B_1 - B_2$$

とおけば，(8. 1) が成立するから $E \in \overline{\mathfrak{B}}$, 従って $\mathfrak{M} \subset \overline{\mathfrak{B}}$ であり

$$\mu^*(E) = \mu(B) = \overline{\mu}(E).$$

逆に任意の $E \in \overline{\mathfrak{B}}$ に対して，(8. 1) のような B, N をとって $B_1 = B \cup N$, $B_2 = B - N$ とすると，$B_1 \supset E \supset B_2$. そして外測度 μ^* の定義により

$$\mu^*(E - B_2) \leqq \mu(B_1 - B_2) \leqq \mu(N) = 0.$$

だから $E - B_2 \in \mathfrak{M}$; 従って $E = (E - B_2) + B_2 \in \mathfrak{M}$, 以上により $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{B}}$, $\mu^* = \overline{\mu}$ である．（証明終）

問 1. $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ が完備な測度空間で，条件 (8. 6) が満たされていれば，μ から導かれた外測度を Γ とするとき，$\mathfrak{M}_\Gamma = \mathfrak{B}$ である．（すなわち $(X, \mathfrak{M}_\Gamma, \Gamma)$ は $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ と同じものであって，真の拡張ではない．）

はじめの完備化の定義はやや人為的に感じられる方もあろうが，その後に述べたように測度 μ から導かれる外測度 μ^* を作って，μ^*-可測集合の全体を考えるのは自然であろう．しかもこの方法で μ を拡張しても，結局上に述べたように零集合だけしか違わない——従ってはじめに定義した完備化と一致する——ことが導き出されたのである．(8. 6) なる付帯条件は，定理 8. 5 の ii) を $\mu^*(E) = \infty$ のときに証明するのに必要だっただけで，外測度 μ^* の構成と，定理 8. 5 の i) および ii) の $\mu^*(E) < \infty$ の場合までは，必

要でなかった．これらのことにより，完備化された測度空間の意味が，なおはっきりするであろう．

$X=R^N$, $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_N$ とし，$\mathfrak{B}_N$ の上で Lebesgue 測度を考えたものを μ とすると，μ の完備化は本来の Lebesgue 測度である．

測度空間を完備化することにより，もしも空間 X のすべての部分集合が可測になるならば，可測という概念は不要になるわけであるが，一般には必ずしもそうはならない．可測でない集合の例を R^1 における Lebesgue 測度について構成しよう．

ここでは一応，群論に関する知識をまったく仮定しないで述べる．群論について初等的な知識のある方は，以下の記述はかえって繁雑であろうから，この§の最後の小活字の部分だけを読まれればよい．

Lebesgue 非可測集合の構成．

（第一段）R^1 を互いに交わらない集合（その各集合をここでは類と呼ぶことにする）の和

(8. 7) $R^1=R_\alpha+R_\beta+R_\gamma+\cdots$ （右辺の類の数は可算無限個より多い）

に分解して，任意の二つの実数 x, y は

(8. 8) $x-y$ が有理数のとき，そのときに限り x と y とは同じ類に属する

ようにできる．

証明．各 $x\in R^1$ に対して $R_x=\{z;\ z-x$ が有理数$\}$ とすると

i) $x\in R_x$, ii) $y\in R_x$ ならば $x\in R_y$, iii) $x\in R_y$, $y\in R_z$ ならば $x\in R_z$.

だから任意の x, $y\in R^1$ に対して R_x と R_y とは交わらないかまたは一致する．($R_x\cap R_y\ni z$ とすると，$x\in R_z$, $z\in R_y$ だから，$w\in R_x$ ならば $w\in R_y$, 従って $R_x\subset R_y$. 同様にして $R_y\subset R_x$ も言えるから $R_x=R_y$ である．) だから $\{R_x;\ x\in R^1\}$ の中で相異なるもの全体を R_α, R_β, R_γ, $\cdots$ とすれば (8. 7), (8. 8) が成り立つことは明らかである．

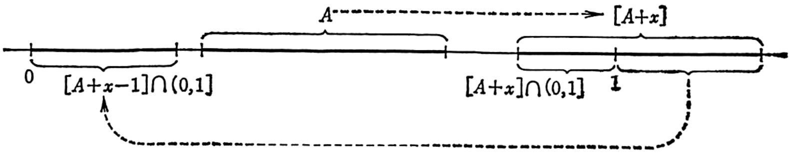
（第二段）各類 R_α, R_β, R_γ, $\cdots$ から一つずつ代表元 x_α, x_β, x_γ, $\cdots$ をとり出しその代表元の全体を A とする.*) r が有理数なら x と $x-r$ とは同じ類に属するから，すべての代表元は区間 $I=(0, 1]$ に属するようにとれる，従って $A\subset I$ とする．$0<r\leqq 1$ なる有理数 r の全体を R_0 とし，各 $r\in R_0$ に対して

(8. 9)
$$A_r=[A+r]\cap I+[A+r-1]\cap I$$

と定義する．すなわち A_r は A を r だけ右にずらしてから区間 I の右へ出た部分だけを左へ1だけもどして I の中へ入れたものである．（次の図参照——A は区間ではなく，A も A^c も I で稠密な集合であるから図に描くことはできないが，次の図では (8. 9)

*) ここで集合論における選択公理を使っているわけであるが，ここを読まれるには集合論のことにはこだわらずに大体の概念を把握されればよい．

の意味を直観的に説明するために A を区間のように表わした.）このとき次の二つのことが言える.



(8. 10) $$r,\ s\in R_0 \text{ で } r\neq s \text{ ならば } A_r\frown A_s=\phi,$$

(8. 11) $$I=\sum_{r\in R_0} A_r.$$

証明. $A_r\frown A_s\ni x$ とすると (8. 9) により

$$x=x_\alpha+r'=x_\beta+s',\quad \begin{cases} r'=r \text{ または } r'=r-1 \\ s'=s \text{ または } s'=s-1 \end{cases}$$

なる x_α, $x_\beta\in A$ が存在する. 従って $x_\alpha-x_\beta=s'-r'=$有理数 となるから $x_\alpha=x_\beta$. だから $r'=s'$, 従って $r=s$ または $|r-s|=1$ となる. これは r, $s\in R_0$ で $r\neq s$ なる仮定と矛盾する. だから (8. 10) が成り立つ. 次に (8. 11) を証明する. 任意の $x\in I$ をとると (8. 7) により x は必ずただ一つの類, 例えば R_α に属するから, $x=x_\alpha+r$ (r は有理数) と書ける. ここで x, $x_\alpha\in I$ だから $|r|<1$ である. $r>0$ ならば $r\in R_0$ で $x\in A_r$ となる. $r\leqq 0$ ならば $1+r\in R_0$ であって $x=x_\alpha+(1+r)-1\in A_{1+r}$. だから $I\subset \sum_{r\in R_0} A_r$ である. 一方 $I\supset \sum_{r\in R_0} A_r$ なることは A_r の定義から明らかだから, (8. 11) が成立する.

（第三段）集合 A が **Lebesgue 非可測集合**であることの証明. もしも A が Lebesgue 可測であるとすると, 定理 7. 1 により $[A+r]$, $[A+r-1]$ も Lebesgue 可測で (8. 9) により

(8. 12)
$$\begin{aligned}\mu(A_r)&=\mu([A+r]\frown I)+\mu([A+r-1]\frown I)\\&=\mu([A+r]\frown I)+\mu([A+r]\frown[I+1])\\&=\mu([A+r]\frown\{I+[I+1]\})\overset{*)}{=}\mu([A+r])=\mu(A).\end{aligned}$$

R_0 は可算集合だから, もし $\mu(A)>0$ ならば (8. 11), (8. 12) により $\mu(I)=\sum_{r\in R_0}\mu(A_r)=\infty$ となって不合理であり, また $\mu(A)=0$ ならば (8. 12) によりすべての $r\in R_0$ に対して $\mu(A_r)=0$, 従って (8. 11) により $\mu(I)=\sum_{r\in R_0}\mu(A_r)=0$ となってやはり不合理で

*) $A\subset I$, $r\in R_0\subset I$ だから $[A+r]\subset I+[I+1]$ である. よってこの等式が成り立つ.

ある．以上のようにして A が Lebesgue 可測でないことがわかった．（従って定理 7．2 により A は Borel 集合でもない．）

群論の言葉を使えば，上に述べた非可測集合の構成法は，次のように簡単になる．

$0\leq x<1$ なる実数 x の全体 G は mod 1 で加法群をなす．任意の集合 $A\subset G$ と任意の実数 y に対して，集合 $[A+y \pmod 1)](\subset G)$ を $[A+y]_1$ と書くことにすると，これは $[A+y-n]\frown G+[A+y-n-1]\frown G$ とも書ける，ここに n は y より大きくない整数のうち最大のものである．だから定理 7．1 により

$$(8.\ 13)\quad \begin{cases} A \text{ が Lebesgue 可測なら } [A+y]_1 \text{ も Lebesgue 可測であって} \\ \mu([A+y]_1)=\mu(A). \end{cases}$$

さて G の中の有理数の全体 H は G の部分群をなす．G/H の各剰余類から代表元を一つずつとり出して固定し，その全体を A とする（選択公理）．このとき任意の $x\in G$ は $x\equiv a+r(\text{mod. } 1)$，$a\in A$，$r\in H$ と一意的に書けるから，$G=\sum_{r\in H}[A+r]_1$，ここに H は可算集合であり右辺は直和である．今 A が Lebesgue 可測集合であるとすると，$\mu(A)>0$ ならば (8．13) によりすべての $r\in H$ に対して $\mu([A+r]_1)=\mu(A)>0$ だから，$\mu(G)=\sum_{r\in H}\mu([A+r]_1)=\infty$ となって不合理であり，また $\mu(A)=0$ とするとすべての $r\in H$ に対して $\mu([A+r]_1)=0$ となるから $\mu(G)=0$ となって不合理である．だから A は Lebesgue 可測集合ではない．

問 2. A を上に構成した非可測集合とすると，i) 任意の Borel 集合 $B\subset A$ に対して $\mu(B)=0$; ii) $\inf_{A\subset B\in\mathfrak{B}_1}\mu(B)=\alpha>0$ なる α が存在する（これは A の Lebesgue 外測度 $\mu^*(A)$ が α に等しいことである*)）．

§9. 拡張定理，直積測度

前に有限加法族 $\mathfrak{F}$ の上の有限加法的測度 m から外測度 Γ を作り，m が $\mathfrak{F}$ の上で完全加法的ならば Γ は m の拡張であることを述べた（§5）．特に Euclid 空間 R^N において $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_N$ の場合には，Borel 集合はすべて可測になった．この§では，一般の空間での有限加法族からそれを含む σ- 加法族への測度の拡張に関する定理を述べ，それを応用して直積測度の構成を述べる．

まず今までと同じように

X: 任意の空間，

$\mathfrak{F}$: X の部分集合の有限加法族，

$\mathfrak{B}$: X の部分集合の σ- 加法族で $\mathfrak{F}$ を含むもの

---

*）実は $\mu^*(A)=1$ なるように A を構成することができるのであるが，集合の濃度の概念や超限帰納法を使わなければならないから省略する．

とする．$\mathfrak{F}$ で定義された有限加法的測度 m と $\mathfrak{B}$ で定義された測度 μ とがあるとき，μ が m の**拡張**であるとは

(9. 1) $E\in\mathfrak{F}(\subset\mathfrak{B})$ ならば $\mu(E)=m(E)$

なることである．m を与えたとき，このような μ を定義できる場合に m は $\mathfrak{B}$ の上に**拡張される**という．今後 $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}[\mathfrak{F}]$ の場合を考える．

定理 9. 1. $\mathfrak{F}$ の上の有限加法的測度 m が $\mathfrak{B}[\mathfrak{F}]$ の上の測度 μ に拡張されるための必要十分条件は，m が $\mathfrak{F}$ の上で完全加法的なことである．更に

(9. 2) $\begin{cases} m(X_k)<\infty \text{ なる可算個の集合 } X_k\in\mathfrak{F}\ (k=1,\ 2,\ \cdots) \text{ が存在して} \\ X=\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k \text{ と書ける} \end{cases}$

ならば，拡張は一意的である．(**E. Hopf**（ホッフ）**の拡張定理***))

注意 1. (9. 2) のような X_k ($k=1,\ 2,\ \cdots$) が存在すれば，$X_1\cup\cdots\cup X_k$ を新しく X_k と書いても (9. 2) が成り立つから，はじめから集合列 $\{X_k\}$ は単調増加であるとしてよい．だから今後 (9. 2) のかわりに次の (9. 2′) の形でこの条件を使う：

(9. 2′) $\begin{cases} X_1\subset X_2\subset\cdots\subset X_k\subset\cdots,\ X_k\in\mathfrak{F}\ (k=1,\ 2,\ \cdots),\ m(X_k)<\infty, \\ \lim_{k\to\infty} X_k=X \text{ なる集合列 } \{X_k\} \text{ が存在する．} \end{cases}$

定理 9. 1 の証明．必要なこと．m の拡張 μ が $\mathfrak{B}[\mathfrak{F}]$ の上で完全加法的なことから，m が $\mathfrak{F}$ の上で完全加法的なことは明らかである．

十分なこと．m から定理 5. 1 の方法で外測度 Γ を作ると，定理 6. 1 により $\mathfrak{M}_\Gamma$ は σ-加法族であり Γ は $\mathfrak{M}_\Gamma$ で定義された測度となる．そして定理 5. 2 により $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{M}_\Gamma$ であるから $\mathfrak{B}[\mathfrak{F}]\subset\mathfrak{M}_\Gamma$ となる．また m が $\mathfrak{F}$ の上で完全加法的だから，定理 5. 1 の ii) により $E\in\mathfrak{F}$ ならば $\Gamma(E)=m(E)$ である．だから Γ を $\mathfrak{B}[\mathfrak{F}]$ の上で考えたものを μ とすれば，これが求める拡張である．

次に仮定 (9. 2′) があるときに拡張が一意的なことを示そう．Γ を上に述べた方法による拡張とし，μ を任意の拡張とする．このときまず

(9. 3) 任意の $B\in\mathfrak{B}[\mathfrak{F}]$ に対して $\mu(B)\leqq\Gamma(B)$

である．何となれば，$B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ($E_n\in\mathfrak{F}$; $n=1,\ 2,\ \cdots$) なる任意の掩い方を考えると

$$\mu(B)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)$$

---

*) 位相幾何学において，H. Hopf の拡張定理と呼ばれる別の定理があるから，混同しないように．

となるから，この右辺の下限をとれば (9. 3) を得る．次に，或る k に対して $B\subset X_k$ (条件 (9. 2′) に述べたX_k) となるような $B\in\mathfrak{B}[\mathfrak{F}]$ に対して $\mu(B)=\Gamma(B)$ を証明しよう．上の (9. 3) により

$$\mu(B)\leqq\Gamma(B),\quad \mu(X_k-B)\leqq\Gamma(X_k-B)$$

であるが，一方 $X_k\in\mathfrak{F}$ により $\Gamma(X_k)=\mu(X_k)=m(X_k)<\infty$ だから

$$\mu(X_k)-\mu(X_k-B)=\mu(B)\leqq\Gamma(B)=\Gamma(X_k)-\Gamma(X_k-B)\leqq\mu(X_k)-\mu(X_k-B)$$

となり $\mu(B)=\Gamma(B)$ を得る．さて任意の $B\in\mathfrak{B}[\mathfrak{F}]$ に対して，集合列 $\{B\frown X_k\}_{k=1,2,\cdots}$ は単調増加で B に収束し，また上の結果により $\mu(B\frown X_k)=\Gamma(B\frown X_k)(k=1,2,\cdots)$だから

$$\mu(B)=\lim_{k\to\infty}\mu(B\frown X_k)=\lim_{k\to\infty}\Gamma(B\frown X_k)=\Gamma(B).\qquad\text{(証明終)}$$

条件 (9. 2) が成り立たないときは拡張の一意性は必ずしも言えない．例えば $X=\{0,1,2,\cdots\}$，$\mathfrak{F}=\{E\subset X;\ E$ または E^c が 0 を含まない有限集合$\}$ としておき

$$\text{(9. 4)}\qquad m(E)=\begin{cases}E\text{ の点の個数} & (E\text{ が有限集合のとき})\\ \infty & (E\text{ が無限集合のとき})\end{cases}$$

と定義すると，$\mathfrak{F}$ は有限加法族であり，m は $\mathfrak{F}$ の上で完全加法的である．このとき $\mathfrak{B}[\mathfrak{F}]$ は X のすべての部分集合の族である．μ を m の $\mathfrak{B}[\mathfrak{F}]$ への拡張とすると，0 を含まない集合 B に対しては $\mu(B)$ は m と同じく (9. 4) の形で与えられるが，一点 0 から成る集合の測度は 0 から ∞ までの任意の値でよい．

定理 9. 2. m が $\mathfrak{F}$ の上で完全加法的なことは，次の二つの条件と同等である：

$$\text{(9. 5)}\qquad \begin{cases}E_n\in\mathfrak{F}\ (n=1,2,\cdots),\ E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots,\ m(E_1)<\infty,\ \bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=\phi\\ \text{ならば}\ \lim_{n\to\infty}m(E_n)=0,\end{cases}$$

$$\text{(9. 6)}\qquad \begin{cases}E_n\in\mathfrak{F}\ (n=1,2,\cdots),\ E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots,\ E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathfrak{F},\\ m(E)=\infty\ \text{ならば}\ \lim_{n\to\infty}m(E_n)=\infty.\end{cases}$$

証明. まず m が $\mathfrak{F}$ の上で完全加法的であるとする．(9. 5) の仮定を満たす集合列 $\{E_n\}$ に対して，$E_n-E_{n+1}=F_n$ $(n=1,2,\cdots)$ とおくと

$$F_n\in\mathfrak{F},\quad E_n=\sum_{\nu=n}^{\infty}F_\nu\quad(n=1,2,\cdots).$$

だから $\sum_{n=1}^{\infty}m(F_n)=m(E_1)<\infty$，従って

$$\lim_{n\to\infty}m(E_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=n}^{\infty}m(F_\nu)=0.$$

また (9. 6) の仮定を満たす集合列 $\{E_n\}$ に対して

$$F_1=E_1,\ F_n=E_n-E_{n-1}\quad (n=2, 3, \cdots)$$

とおくと，F_1, F_2, … はどの二つも互に素で

$$F_n\in\mathfrak{F},\ E_n=\sum_{\nu=1}^{n}F_\nu,\quad E=\sum_{\nu=1}^{\infty}F_\nu.$$

だから

$$\lim_{n\to\infty}m(E_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}m(F_\nu)=\sum_{\nu=1}^{\infty}m(F_\nu)=m(E)=\infty.$$

逆に (9. 5), (9. 6) が成り立つとする．$F_1, F_2, \cdots$ が $\mathfrak{F}$ に属しどの二つも互いに素で，しかも $F=\sum_{n=1}^{\infty}F_n\in\mathfrak{F}$ と仮定する．$m(F)<\infty$ のときは，$E_n=F-(F_1+F_2+\cdots+F_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$ とおくと集合列 $\{E_n\}$ は (9. 5) の仮定を満たし

$$m(E_n)=m(F)-\sum_{\nu=1}^{n}m(F_\nu)$$

であるから，$n\to\infty$ とすると (9. 5) により $m(F)=\sum_{\nu=1}^{\infty}m(F_\nu)$ を得る．また $m(F)=\infty$ のときは，$E_n=F_1+F_2+\cdots+F_n$ $(n=1, 2, \cdots)$, $E=F$ とおくと，集合列 $\{E_n\}$ と E とは (9. 6) の仮定を満たし

$$m(E_n)=\sum_{\nu=1}^{n}m(F_\nu)$$

である．だから $n\to\infty$ とすると (9. 6) により

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}m(F_\nu)=\lim_{n\to\infty}m(E_n)=\infty=m(F).$$

こうして m が $\mathfrak{F}$ の上で完全加法的なことがわかった．（証明終）

なお次の定理も有用である．

定理 9. 3. 仮定 (9. 2′) が成立しているときは，m が $\mathfrak{F}$ の上で完全加法的なためには (9. 5) と次の (9. 6′) とが成立すれば十分である：

(9. 6′)　　$m(F)=\infty$ なる任意の $F\in\mathfrak{F}$ に対して $\lim_{k\to\infty}m(F\cap X_k)=\infty.$

（これらの条件が必要なことは前定理から明らかである．）

証明. $F_1, F_2, \cdots$ が $\mathfrak{F}$ に属し，どの二つも互いに素で $F=\sum_{n=1}^{\infty}F_n\in\mathfrak{F}$ とする．$m(F)<\infty$ ならば (9. 5) だけから $m(F)=\sum_{n=1}^{\infty}m(F_n)$ が出る（前定理の証明参照）から，$m(F)=\infty$ のとき $\sum_{n=1}^{\infty}m(F_n)=\infty$ となることを示せばよい．任意の $\alpha>0$ に対して，条件 (9. 6′) により

$$m(F\cap X_k)>\alpha$$

なる k がある．このとき

$$F\cap X_k=\sum_{n=1}^{\infty} F_n\cap X_k,\quad m(F\cap X_k)\leqq m(X_k)<\infty$$

だから，(9. 5) により（前定理の証明と同様にして）

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(F_n\cap X_k)=m(F\cap X_k)>\alpha$$

となる．従って $\sum_{n=1}^{\infty} m(F_n)\geqq\sum_{n=1}^{\infty} m(F_n\cap X_k)>\alpha$ となり，α は任意に大きくとれるから $\sum_{n=1}^{\infty} m(F_n)=\infty$ である．（証明終）

注意 2. $m(X)<\infty$ のときは，(9. 5) と (9. 6)（或いは (9. 6′)）のかわりに

(9. 5′) $$\begin{cases} E_n\in\mathfrak{F}\ (n=1,2,\cdots),\ E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots,\ \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n=\phi \\ \text{ならば}\ \lim_{n\to\infty} m(E_n)=0 \end{cases}$$

だけで十分なことは明らかである．この形の定理は確率論において重要である．$m(X)=\infty$ のときは (9. 5′) は m が $\mathfrak{F}$ の上で完全加法的なための必要条件とはならない（$m(E_1)<\infty$ を仮定せねばならぬ）が，一方 (9. 5) だけでは必要条件ではあっても十分条件でない．

$X=(0,1]$ において $I=(a,b]$ ($0\leqq a\leqq b\leqq 1$, ただし $a=b$ のときは $I=\phi$) なる形の区間の有限和の全体を $\mathfrak{F}$ とする．$I=(a,b]$ に対して

$$m(I)=\begin{cases} 0 & (0<a\leqq b\leqq 1 \text{ または } 0=a=b \text{ のとき}) \\ \infty & (0=a<b\leqq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とし，$E=I_1+I_2+\cdots+I_n\in\mathfrak{F}$ に対して $m(E)=m(I_1)+m(I_2)+\cdots+m(I_n)$ とすると，m は $\mathfrak{F}$ の上の有限加法的測度で (9. 5) を満たす ($E_1\supset E_2\supset\cdots$, $m(E_1)<\infty$ ならば，E_1 は $(0,b]$, $b>0$, なる形の区間を含まないから $m(E_1)=0$ である)．一方 $E_n=\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$ とすると $m(E_n)=0$ $(n=1,2,\cdots)$ であってしかも $m\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)=m(X)=\infty$ となるから，m は完全加法的でない．

次に二つの測度空間 $(X,\mathfrak{B}_X\ \mu_1)$, $(Y,\mathfrak{B}_Y,\mu_2)$ が与えられたとし，どちらも (9. 2′) の形の条件を満たすとする．すなわち

(9. 7_1) $$\begin{cases} \mathfrak{B}_X \text{ に属する集合の単調増加列 } \{X_k\} \text{ で } \mu_1(X_k)<\infty\ (k=1,2,\cdots), \\ \lim_{k\to\infty} X_k=X \text{ なるものがあり，} \end{cases}$$

(9. 7_2) $$\begin{cases} \mathfrak{B}_Y \text{ に属する集合の単調増加列 } \{Y_k\} \text{ で } \mu_2(Y_k)<\infty\ (k=1,2,\cdots), \\ \lim_{k\to\infty} Y_k=Y \text{ なるものがある．} \end{cases}$$

直積空間 $Z=X\times Y$ の中で

$$K=E\times F \quad (E\in\mathfrak{B}_X,\ F\in\mathfrak{B}_Y)$$

なる形の集合を**矩形集合**という．有限個の矩形集合の直和として表わされる集合の全体 $\mathfrak{F}$ は有限加法族をなす（定理 4. 1）．$\mathfrak{F}$ を含む最小の σ-加法族 $\mathfrak{B}_Z=\mathfrak{B}[\mathfrak{F}]$ を**直積 Borel 集合族**または**直積 σ-加法族**といい，$\mathfrak{B}_Z=\mathfrak{B}_X\times\mathfrak{B}_Y$ と書くことがある．$\mathfrak{B}_Z$ の上の測度 μ で

$$(9.\ 8)\qquad \begin{cases}\text{矩形集合 } K=E\times F\ (\mu_1(E)<\infty,\ \mu_2(F)<\infty) \text{ に対しては}\\ \qquad\qquad \mu(K)=\mu_1(E)\mu_2(F)\end{cases}$$

となるものを μ_1 と μ_2 との**直積測度**という．以下において，このような μ の存在と一意性を証明する．

まず矩形集合 $K=E\times F$ に対して

$$(9.\ 9)\qquad m(K)=\begin{cases}0 & (\mu_1(E),\ \mu_2(F) \text{ のうち少なくも一方が } 0 \text{ のとき}^{*)})\\ \mu_1(E)\mu_2(F) & (0<\mu_1(E)\leqq\infty,\ 0<\mu_2(F)\leqq\infty \text{ のとき})\end{cases}$$

と定義し，$\mathfrak{F}$ に属する任意の集合

$$(9.\ 10)\qquad K=\sum_{j=1}^{n}(E_j\times F_j)\ \ (E_j\in\mathfrak{B}_X,\ F_j\in\mathfrak{B}_Y;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

に対して

$$(9.\ 11)\qquad m(K)=\sum_{j=1}^{n}m(E_j\times F_j)$$

と定義すると，m の値は K の (9. 10) のような表わし方には関係しない.**) したがって m は $\mathfrak{F}$ の上の有限加法的測度である．更に (9. 7_1), (9. 7_2) により．(9. 2′) の形の条件が成立する．すなわち $Z_k=X_k\times Y_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ とすると

$$(9.\ 7_3)\qquad \begin{cases}Z_1\subset Z_2\subset\cdots\subset Z_k\subset\cdots,\ \ Z_k\in\mathfrak{F}\ (k=1,\ 2,\ \cdots),\\ m(Z_k)=\mu_1(X_k)\mu_2(Y_k)<\infty,\ \ \lim\limits_{k\to\infty}Z_k=Z.\end{cases}$$

ここで次のことを証明しよう．

定理 9. 4. 上に述べた m は $\mathfrak{F}$ の上で完全加法的である．

まず補助定理を三つ述べる．

---

*) 他方が ∞ でもよい．例えば $\mu_1(E)=0,\ \mu_2(F)=\infty$ なら $m(K)=0$ とする．この場合 (9. 7_2) により，$K_k=E\times(F\frown Y_k)$ とすると $K=\lim\limits_{k\to\infty}K_k$ となるが，$m(K_k)=\mu_1(E)\mu_2(F\frown Y_k)=0$ とすべきだから，すぐ後の定理 9. 4 が成り立つようにするには $m(K)=\lim\limits_{k\to\infty}m(K_k)=0$ とせねばならない．

**) §3，例 3 の場合と同様にしていえる．

補助定理 1. $K\in\mathfrak{F}$ ならば $E_j\in\mathfrak{B}_X$, $F_j\in\mathfrak{B}_Y$ $(j=1, \cdots, n)$ を

(9. 12)
$$\begin{cases} K=(E_1\times F_1)+\cdots+(E_n\times F_n) \\ j\neq k \text{ ならば } E_j\cap E_k=\phi \end{cases}$$

となるように選ぶことができる．

補助定理 2. $K_n\in\mathfrak{F}\ (n=1, 2, \cdots)$, $K_1\supset K_2\supset\cdots\supset K_n\supset\cdots$ ならば

(9. 13)
$$K_n=(E_{n1}\times F_{n1})+\cdots+(E_{nk_n}\times F_{nk_n})$$

なる $E_{nj}\in\mathfrak{B}_X$, $F_{nj}\in\mathfrak{B}_Y$ $(j=1, \cdots, k_n;\ n=1, 2, \cdots)$ を

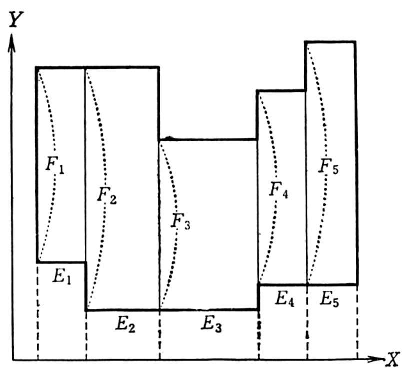
(9. 14)　$j\neq k$ ならば $E_{nj}\cap E_{nk}=\phi$ であって

(9. 15)　E_{nj} は或る $E_{n-1,k}$ に含まれる $(n\geqq 2)$

ように選ぶことができる．

補助定理 3. 上の (9. 13), (9. 14), (9. 15) が満たされているとする．正数 c を固定して，各 n に対して $\mu_2(F_{nj})>c$ なる j についての和を $\sum'$ と書くことにして $E_n'=\sum' E_{nj}$ とおくと，$E_1'\supset E_2'\supset\cdots\supset E_n'\supset\cdots$ となる．

補助定理 1 は $K\in\mathfrak{F}$ に対し右図のように E_j, F_j をとれることを意味する．補助定理 2 は次のようにしてわかる．まず補助定理 1 によって



$$\begin{cases} K_n=(E^\circ_{n1}\times F^\circ_{n1})+\cdots \\ \qquad\cdots+(E^\circ_{nj_n}\times F^\circ_{nj_n}) \\ j\neq k \text{ ならば } E^\circ_{nj}\cap E^\circ_{nk}=\phi \end{cases}$$

なる $E^\circ_{nj}\in\mathfrak{B}_X$, $F^\circ_{nj}\in\mathfrak{B}_Y$ をとる．次に数学的帰納法で，まず $n=1$ に対して $E_{1j}=E^\circ_{1j}$, $F_{1j}=F^\circ_{1j}$ とする．一般に E_{nj}, F_{nj} まで得られたとき，$n+1$ に対しては $E^\circ_{n+1,k}\cap E_{nj}$ なる形の集合のうちで空でないものを $E_{n+1,j}$ $(j=1, \cdots, k_{n+1})$ とし，$E_{n+1,j}$ を含む $E^\circ_{n+1,k}$ に対応する $F^\circ_{n+1,k}$ を $F_{n+1,j}$ とすればよい．補助定理 3 は補助定理 2 から容易に導かれる．

これら三つの補助定理をくわしく証明することは読者の演習問題とする（巻末の解答を見ればよい）が，ここでは上に述べた大体の概念だけをつかんで先へ進まれてもよい．

定理 9. 4. の証明．条件 (9. 7_3) があるから，定理 9. 3 により次の二つのことを証明すればよい：

$$(9.\ 16)\quad \begin{cases} K_n \in \mathfrak{F}\ (n=1,\ 2,\ \cdots),\ K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots,\ m(K_1) < \infty, \\ \lim_{n\to\infty} m(K_n) = c > 0\ \text{ならば}\ \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \phi.\ ^{*)} \end{cases}$$

$$(9.\ 17)\quad K \in \mathfrak{F},\ m(K) = \infty\ \text{ならば}\ \lim_{k\to\infty} m(K \frown Z_k) = \infty.$$

(9. 16) の証明．補助定理 2 により (9. 13), (9. 14), (9. 15) を満たす $E_{nj} \in \mathfrak{B}_X$, $F_{nj} \in \mathfrak{B}_Y$ ($j=1, \cdots, k_n$; $n=1, 2, \cdots$) が存在する．ここで $\mu_1(E_{nj})=0$ なるすべての E_{nj} の和集合を E_0, $\mu_2(F_{nj})=0$ なるすべての F_{nj} の和集合を F_0（どちらも n, j 両方を動かしての和集合）とし，$K_0=(E_0\times Y)\cup(X\times F_0)$ とすると，各 K_n を K_n-K_0 でおきかえても (9. 16) の中の仮定を満たすから，はじめからすべての n, j に対して $\mu_1(E_{nj})>0$, $\mu_2(F_{nj})>0$ としてよい．従って，$m(K_1)<\infty$ により，$\mu_1(E_{nj})<\infty$, $\mu_2(F_{nj})<\infty$ である（(9. 9) を見よ）．そこで

$$\beta = \sum_{j=1}^{k_1} \mu_1(E_{1j}) + \sum_{j=1}^{k_1} \mu_2(F_{1j})$$

とおき，各 n に対して $\mu_2(F_{nj})>c/2\beta$ なる j についての和を $\sum'$, その他の j についての和を $\sum''$ と書くことにして，$E_n'=\sum' E_{nj}$, $E_n''=\sum'' E_{nj}$ とおくと，

$$\begin{aligned} c \leqq m(K_n) &= \textstyle\sum' \mu_1(E_{nj})\mu_2(F_{nj}) + \sum'' \mu_1(E_{nj})\mu_2(F_{nj}) \\ &\leqq \textstyle\sum' \beta\cdot\mu_1(E_{nj}) + \sum'' \dfrac{c}{2\beta}\cdot\mu_1(E_{nj}) \\ &= \beta\cdot\mu_1(E_n') + \dfrac{c}{2\beta}\cdot\mu_1(E_n'') \leqq \beta\cdot\mu_1(E_n') + \dfrac{c}{2} \end{aligned}$$

だから $\mu_1(E_n') \geqq \dfrac{c}{2\beta}$. 一方補助定理 3 により $E_1' \supset E_2' \supset \cdots \supset E_n' \supset \cdots$ であり，μ_1 は $\mathfrak{B}_X$ の上の測度——従って完全加法的——であるから $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n' \neq \phi$; この集合の中の一点 x_0 をとると，各 n に対して $E_{nj_n} \ni x_0$ なる j_n がある．この j_n に対する F_{nj_n} は (9. 14) により K_n の $x=x_0$ による‘切り口’であるから，$K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots$ なることにより $F_{1j_1} \supset F_{2j_2} \supset \cdots \supset F_{nj_n} \supset \cdots$. しかも E_n' の定義により $\mu_2(F_{nj_n})>c/2\beta$ ($n=1, 2, \cdots$) だから，μ_2 が $\mathfrak{B}_Y$ の上の測度であることにより $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_{nj_n} \neq \phi$; この中の一点を y_0 とすると，$n=1, 2, \cdots$ に対して $(x_0, y_0) \in E_{nj_n} \times F_{nj_n} \subset K_n$. すなわち $(x_0, y_0) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ となり (9. 16) が証明された．

(9. 17) の証明．$K \in \mathfrak{F}$ だから $K=(E_1\times F_1)+\cdots+(E_n\times F_n)$ ($E_j \in \mathfrak{B}_X$, $F_j \in \mathfrak{B}_Y$) と

---

*) これは，(9. 5) の終結を否定すると，(9. 5) の仮定の最後のものが成立しないことを意味する．

表わされる．$m(K)=\infty$ だから少なくも一つの j に対して $m(E_j\times F_j)=\infty$ である．このjに対しては，(9. 9) により $\mu_1(E_j)$，$\mu_2(F_j)$ のうち少なくも一方は ∞ で他方は正（または∞）であるから，例えば $\mu_1(E_j)=\infty$ とし $\mu_2(F_j)>\beta>0$ なる β をとる．このとき

$$\lim_{k\to\infty}\mu_2(F_j\cap Y_k)=\mu_2(F_j)>\beta$$

だから，或る k_0 が存在して

(9. 18)　$$k>k_0 \text{ ならば } \mu_2(F_j\cap Y_k)>\beta.$$

さて任意の $\alpha>0$ をとると，

$$\lim_{k\to\infty}\mu_1(E_j\cap X_k)=\mu_1(E_j)=\infty$$

なることにより，或る k_1 が存在して

(9. 19)　$$k>k_1 \text{ ならば } \mu_1(E_j\cap X_k)>\alpha/\beta.$$

ところが

$$K\cap Z_k\supset(E_j\times F_j)\cap(X_k\times Y_k)=(E_j\cap X_k)\times(F_j\cap Y_k)$$

だから，(9. 18) と (9. 19) により $k>\max\{k_0, k_1\}$ ならば

$$m(K\cap Z_k)\geqq\mu_1(E_j\cap X_k)\cdot\mu_2(F_j\cap Y_k)>\alpha.$$

よって $\lim_{k\to\infty} m(K\cap Z_k)=\infty$ である．（証明終）

上の定理と定理 9. 1 とにより，m を $\mathfrak{B}[\mathfrak{F}]$ の上の（完全加法的な）測度 μ に一意的に拡張できる．この μ は明らかに (9. 8) を満たすから，μ_1 と μ_2 との直積測度である．μ を完備化（§8）したものを**完備直積測度**という．

注意 3. μ_1，μ_2 がともに完備であっても，その直積測度は（再び完備化しなければ）必ずしも完備ではない．

問 1. 上の定理の証明中に述べた三つの補助定理を証明せよ．

問 2. R^{p+q} における Lebesgue 測度は，R^p の上の Lebesgue 測度と R^q の上の Lebesgue 測度との直積測度の完備化である．

III 可測函数と積分

§10. 可測函数

空間 X とその部分集合の σ-加法族 $\mathfrak{B}$ との組，すなわち可測空間 $(X,\ \mathfrak{B})$ が与えられたとし，一つの集合 $E\in\mathfrak{B}$ を固定する．E で定義された点函数 $f(x)$ を考える；$f(x)$ の値は実数または $\pm\infty$ とする．まず次の記号を導入しておこう．a を実数または $\pm\infty$ とするとき

$$E(f>a)=\{x\in E;\ \ f(x)>a\}$$

と定義する．同様に

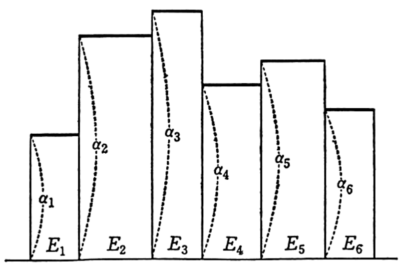
$$E(f\leqq a)=\{x\in E;\ \ f(x)\leqq a\},$$
$$E(f=a)=\{x\in E;\ \ f(x)=a\},$$
$$E(a<f\leqq b)=\{x\in E;\ \ a<f(x)\leqq b\}\qquad(-\infty\leqq a<b\leqq\infty)$$

なども定義される．

集合 E を $E=E_1+E_2+\cdots+E_n$ と有限個の集合の直和に分けて

(10. 1) $$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\chi_{E_j}(x)\qquad\begin{pmatrix}\alpha_j\ \text{は実数，}\ \alpha_j\neq\alpha_k(j\neq k),\\ \chi_{E_j}\ \text{は集合}\ E_j\ \text{の定義函数}\end{pmatrix}$$

なる形に表わされる函数を**単函数**または**階段函数**という．右図は $f(x)$ のグラフの直観的説明であるが，各 E_j は一般には複雑な集合であるから，そのグラフは図のような常識的な‘階段’になるとは限らない．



我々の目的は函数（単函数とは限らない）の積分を定義することであるが，どのような函数に対して積分の定義が可能かを考える．まずこの図のような単函数の場合は，Riemann 積分の考え方を拡張して $\alpha_1\mu(E_1)+\alpha_2\mu(E_2)+\cdots+\alpha_n\mu(E_n)$ を f の E 上での積分の値として定義するのが自然であろう．そのためには $E_1,\ E_2,\ \cdots,\ E_n$ の測度が定義されていなければならないから各 E_j は $\mathfrak{B}$ に属しなければならない．このことは最初に述べた記号で $E(f=\alpha_j)\in\mathfrak{B}$ とも書ける．従って任意の実数 a に対して

(10. 2) $$E(f>a)\in\mathfrak{B}$$

である．一般の函数の場合は α_j のような特別の役目をする実数や E_j のような特別の集合は存在しないから，性質 (10. 2) に注目してこのような函数を‘可測’函数と呼び，それに対していろいろの性質を出してから積分を定義するのである．‘可測’という言葉は元来は測度を測り得ることであるが，測度の定義されている σ- 加法族だけ考えれば（測度を表面に出さずに）可測函数の定義やいろいろの性質が述べられるから，測度をはなれて σ- 加法族だけに関係した性質に‘可測’という言葉を使う．σ- 加法族 $\mathfrak{B}$ に属する集合を $\mathfrak{B}$- 可測集合と呼ぶことがある（§6）のも同じ理由による．また $(X, \mathfrak{B})$ なる組を可測空間と呼ぶのは，上に述べた意味での可測性を考え得る空間ということである．

さてもう一度可測函数の定義から始めよう．E で定義せられた函数 $f(x)$ が，任意の実数 a に対して (10. 2) を満たすとき，$f(x)$ を $\mathfrak{B}$- **可測函数**または**可測** ($\mathfrak{B}$) **なる函数**という；$\mathfrak{B}$ を特に書かなくても誤解の恐れがないときは単に**可測函数**という．

$f(x)$ が $\mathfrak{B}$- 可測なためには，任意の有理数 r に対して $E(f>r)\in\mathfrak{B}$ であればよい．なぜならば，任意の実数 a に対して単調減少で a に近づく有理数列 $\{r_n\}$ をとれば

$$E(f>a)=\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f>r_n)\in\mathfrak{B}.$$

$f(x)$ が $\mathfrak{B}$- 可測，すなわち任意の実数 a に対して $E(f>a)\in\mathfrak{B}$ ならば，次の各集合が $\mathfrak{B}$ に属することが上から順に言える：

(a)　$E(f\leqq a)=E-E(f>a)\in\mathfrak{B}$,

(b)　$E(f\geqq a)=\bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f>a-\frac{1}{n}\right)\in\mathfrak{B}$,

(c)　$E(f<a)=E-E(f\geqq a)\in\mathfrak{B}$　((b) により),

(d)　$E(f=a)=E(f\geqq a)\cap E(f\leqq a)\in\mathfrak{B}$　((a), (b) により),

(e)　$E(f<\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f<n)\in\mathfrak{B}$　((c) により),

(f)　$E(f=\infty)=E-E(f<\infty)\in\mathfrak{B}$　((e) により),

(g)　$E(f>-\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f>-n)\in\mathfrak{B}$,

(h)　$E(f=-\infty)=E-E(f>-\infty)\in\mathfrak{B}$　((g) により).

逆に $f(x)$ が $\mathfrak{B}$- 可測であることの定義に，上の (a), (b), (c) のどの一つを使ってもよい．何となれば，任意の実数 a に対して

$$E(f>a)=\bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(f\geqq a+\frac{1}{n}\right)=E-E(f\leqq a)=E-\bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f<a+\frac{1}{n}\right)$$

が成り立つから，(a), (b), (c) のどれか一つがあれば $E(f>a)\in\mathfrak{B}$ となる．

問 1. (10. 1) の形の単函数が $\mathfrak{B}$- 可測であるための必要十分条件は，すべての j に対して $E_j\in\mathfrak{B}$ なることである．

注意 1. 函数 $f(x)$に対して

$$f^{+}(x)=\max\{f(x),\ 0\},\quad f^{-}(x)=\max\{-f(x),\ 0\}^{*)}$$

とおくと，$f^{+}(x)\geqq 0$，$f^{-}(x)\geqq 0$ であって $f(x)=f^{+}(x)-f^{-}(x)$ と書かれ，$f(x)$ が $\mathfrak{B}$-可測なことは $f^{+}(x)$，$f^{-}(x)$ がともに $\mathfrak{B}$-可測であることと同等である．だから非負値 $\mathfrak{B}$-可測函数について成り立つ事柄を一般の $\mathfrak{B}$-可測函数に関するものに言いなおすことができる．

注意 2. $f(x)$ が $E\,(\in\mathfrak{B})$ で $\mathfrak{B}$-可測であって，$A\subset E$，$A\in\mathfrak{B}$ ならば，$f(x)$ は A の上で考えても $\mathfrak{B}$-可測である．このことは，定義から明らかであるから，今後ことわりなしに使う．

今後この § では‘E で $\mathfrak{B}$-可測’なことを単に可測ということにする．可測函数に関するいくつかの定理を述べよう．

定理 10. 1. $f(x)$ が E で可測で $\geqq 0$ ならば，E で可測で $\geqq 0$ なる単函数の単調増加列 $\{f_n(x)\}$ で，$f(x)$ に E の各点で収束するものが存在する．

証明.

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{k-1}{2^n} & \left(\begin{array}{l}x\in E\left(\dfrac{k-1}{2^n}\leqq f<\dfrac{k}{2^n}\right)\ \text{のとき，ただし}\\ k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2^n n\end{array}\right)\\[2ex] n & (x\in E(f\geqq n)\ \text{のとき})\end{cases}$$

と定義する．$f(x)$ の値の分割のしかたが 2^n 等分法によっているから，$n+1$ のときは n のときの細分になっている．だから各点 $x\in E$ で $\{f_n(x)\}$ は単調増加である．また f が可測なことによって

$$E\left(f_n=\frac{k-1}{2^n}\right)\in\mathfrak{B};$$

従って f_n は可測である．最後に $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ の証明：$f(x)=\infty$ なる点 x においては $f_n(x)=n$ だから $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\infty$；また $f(x)<\infty$ なる点 x では $n>f(x)$ なるすべての n に対して $|f_n(x)-f(x)|\leqq 1/2^n$ となるから $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ である．

定理 10. 2. f，g が可測函数ならば $E(f>g)$，$E(f\geqq g)$，$E(f=g)$ はすべて $\mathfrak{B}$ に属する．

証明. すべての有理数の集合を R_0 とすると，R_0 は可算集合だから

$$E(f>g)=\bigcup_{r\in R_0}\{E(f>r)\frown E(r>g)\}\in\mathfrak{B}.$$

---

*) $\max\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n\}$ は $\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n$ のうちの最大の数を表わす．また $\min\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n\}$ は $\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n$ のうちの最小の数を表わす．

同様に $E(g>f)\in\mathfrak{B}$ でもあるから

$$E(f\geqq g)=E-E(g>f)\in\mathfrak{B},$$

従ってまた

$$E(f=g)=E(f\geqq g)-E(f>g)\in\mathfrak{B}.$$

定理 10. 3. f が可測ならば，任意の実数 $\alpha\neq0$ に対して $|f(x)|^{\alpha}$ は可測である．ただし，$\alpha<0$ のときは $f(x)=0$ なる点 x においては $|f(x)|^{\alpha}=\infty$ と規約する．*)

証明. $\alpha>0$ の場合．a を任意の実数とすると

$a>0$ ならば $E(|f|^{\alpha}\geqq a)=E(|f|\geqq a^{1/\alpha})=E(f\geqq a^{1/\alpha})\cup E(f\leqq -a^{1/\alpha})\in\mathfrak{B}$,

$a\leqq0$ ならば $E(|f|^{\alpha}\geqq a)=E\in\mathfrak{B}$

だから $|f(x)|^{\alpha}$ は可測である．$\alpha<0$ の場合も同様に証明できる．

定理 10. 4. f, g が有限な値をとる可測函数ならば，任意の実数 α, β に対して $\alpha f+\beta g$ は可測函数である．

証明. $\alpha=\beta=0$ のときは明らかである．
$\alpha\neq0$, $\beta=0$ のときは，任意の実数 a に対して

$$\alpha\gtrless0 \text{ に従って } E(\alpha f+\beta g>a)=E\left(f\gtrless\frac{a}{\alpha}\right)\in\mathfrak{B}.$$

$\alpha\neq0$, $\beta\neq0$ のときは任意の実数 a に対して，まず

$$\alpha\gtrless0 \text{ に従って } E(\alpha f+\beta>a)=E\left(f\gtrless\frac{a-\beta}{\alpha}\right)\in\mathfrak{B}$$

だから，$\alpha f+\beta$ は可測である．だから

$$\beta\gtrless0 \text{ に従って } E(\alpha f+\beta g>a)=E\left(g\gtrless-\frac{\alpha}{\beta}f+\frac{a}{\beta}\right)\in\mathfrak{B} \qquad \text{(定理 10. 2)}$$

となり，$\alpha f+\beta g$ は可測である．

定理 10. 5. $f(x)$, $g(x)$ が有限な値をとる可測函数ならば積 $f(x)g(x)$ も可測である．

証明. $f\cdot g=\dfrac{1}{4}\{(f+g)^2-(f-g)^2\}$ と，上の二つの定理によって $f\cdot g$ は可測である．

定理 10. 6. $f_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ が可測ならば

$$\sup_{n\geqq1} f_n(x), \quad \inf_{n\geqq1} f_n(x), \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x), \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$$

---

*) $\alpha=0$ のときは $f(x)=0$ なる点で意味を持たなくなる．$E(f\neq0)$ の上だけで考えるならば（従って特に $f(x)$ が決して0にならない場合は）$|f|^0\equiv1$ だからこの定理は自明である．

はすべて可測である．従って $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在すれば $f(x)$ も可測である．

証明．$g(x)=\sup_{n\geq 1} f_n(x)$，$h(x)=\inf_{n\geq 1} f_n(x)$ とおく．任意の実数 a に対して

$$E(g>a)=\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n>a)\in\mathfrak{B}$$

だから g は可測である．従って $h(x)=-\sup_{n\geq 1}\{-f_n(x)\}$ により h も可測である．次に $g_n(x)=\sup_{\nu\geq n} f_\nu(x)$ とおくと，$g_n(x)$ は可測であって $\inf_{n\geq 1} g_n(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$ だから，$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$ は可測である．従って $\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)=-\overline{\lim_{n\to\infty}}\{-f_n(x)\}$ により $\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$ も可測である．従ってまた $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在すればそれも可測である．（証明終）

E の上で定義された複素数値函数 $f(x)$ が可測であるとは，その実数部分 $\Re f(x)$，虚数部分 $\Im f(x)$ がともに可測なことである，と定義する．このとき

定理 10. 7. f, g が E の上の複素数値可測函数ならば

i) $E(f=g)\in\mathfrak{B}$,

ii) $\alpha f+\beta g$ （α, β は複素数），$f\cdot g$ は可測である．

iii) α が実数 $\neq 0$ ならば $|f|^\alpha$ は可測である．*)

証明．i) と ii) は f, g, α, β を実数部分と虚数部分とに分けて書けば，今までの定理に帰着させることができる．iii) は $|f|^\alpha=(|\Re f|^2+|\Im f|^2)^{\alpha/2}$ により今までの定理に帰着される．

定理 10. 8. $f_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ が E の上の複素数値可測函数で各点 x で有限な $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在するならば $f(x)$ も可測である．

これも実数部分と虚数部分に分ければ定理 10. 6 に帰着される．

次に測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ が与えられたとし，Egoroff（エゴロフ）の定理（次の定理 10. 9）を証明するため，まず補助定理を述べる．

補助定理．$E\in\mathfrak{B}$, $\mu(E)<\infty$ とし，$f_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ は E で有限な値をとる可測函数であって，E の各点で有限な $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在すると仮定する．このとき任意の正数 ε, η に対して或る自然数 n と集合 $H\in\mathfrak{B}$ とが存在して

i) $H\subset E$, $\mu(H)<\eta$,

ii) $E-H$ の上ではすべての $k>n$ に対して $|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon$.

証明．
$$E_n=\bigcap_{k=n}^{\infty} E(|f_k-f|<\varepsilon) \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

---

*) 前頁の脚注参照．

とおくと $E_n \in \mathfrak{B}$ であり，$\lim_{k\to\infty}|f_k(x)-f(x)|=0$ なることにより，$\{E_n\}$ は単調増加集合列であって $\lim_{n\to\infty} E_n=E$ である．だから $\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)=\mu(E)<\infty$，従って

$$\lim_{n\to\infty}\mu(E-E_n)=\lim_{n\to\infty}\{\mu(E)-\mu(E_n)\}=0.$$

だから n を適当に大きくとれば $\mu(E-E_n)<\eta$ となる．よって $H=E-E_n$ とおけば i), ii) が成り立つことは E_n の定義から明らかである．

定理 10. 9 (**Egoroff の定理**). $E\in\mathfrak{B}$, $\mu(E)<\infty$ とし，$f_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ は E の上でほとんどいたる所有限な値をとる可測函数であって，E のほとんどすべての点 x で有限な $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在するものとする．このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して集合 $F\in\mathfrak{B}$ が存在して

i) $F\subset E$, $\mu(E-F)<\varepsilon$,

ii) $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に F の上で一様収束する．

証明. 零集合の可算個の和集合は零集合だから，f_1, f_2, $\cdots$, f が有限な値でない点を全部合併したものは零集合である．だからそのような零集合を除いて考えてもよいから，最初から E の各点で $f_n(x)$, $f(x)$ が有限であるとして証明すればよい．さて上の補助定理において ε, η をそれぞれ $1/2^p$, $\varepsilon/2^p$ (p は自然数) とすると，或る自然数 n_p と集合 $H_p\in\mathfrak{B}$ とが存在して $H_p\subset E$, $\mu(H_p)<\varepsilon/2^p$ であり，$E-H_p$ の上ではすべての $k>n_p$ に対して $|f_k(x)-f(x)|<1/2^p$ となる．よって $F=E-\bigcup_{p=1}^{\infty} H_p$ とおくと $F\subset E$ で

$$\mu(E-F)=\mu\left(\bigcup_{p=1}^{\infty} H_p\right)\leqq\sum_{p=1}^{\infty}\mu(H_p)<\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^p}=\varepsilon.$$

またこのとき $F=\bigcap_{p=1}^{\infty}(E-H_p)$ だから，$x\in F$ ならば

$$\text{任意の } k>n_p \text{ に対して } |f_k(x)-f(x)|<1/2^p.$$

だから $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に F の上で一様収束する．

系. 上の定理において $X=R^N$, $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_N$ (または Lebesgue 可測集合の全体 $\mathfrak{M}$) で μ が Lebesgue 測度ならば，F として閉集合をとることができる．

証明. まず集合 $B\in\mathfrak{B}_N$ (または $\in\mathfrak{M}$) を上の定理の F の性質を持つようにとってから，定理 7. 5 により，閉集合 $F\subset B$ を $\mu(B-F)<\varepsilon-\mu(E-B)$ なるようにとればよい．

定理 10. 10. 測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ を完備化したものを $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ とし (§8 参照)，空間 X は $X=\sum_{k=1}^{\infty} X_k$, $X_k\in\mathfrak{B}$, $\mu(X_k)<\infty$, と表わされるとする．このとき集合 $E\in\mathfrak{B}$ の上で $\mathfrak{M}$- 可測な函数 $f(x)$ に対して，E の上の $\mathfrak{B}$- 可測函数 $g(x)$ で E の上で $|g(x)|$

$\leqq |f(x)|$, $\mu(E(f\neq g))=0$ なるものが存在する.

証明. $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$ とすることにより，この定理の証明は $f(x)\geqq 0$ の場合に帰着される. $f(x)$ が $\mathfrak{M}$-可測で $\geqq 0$ ならば，定理 10. 1 により，*) $f\geqq f_n\geqq 0$ なる $\mathfrak{M}$-可測単函数列 $\{f_n\}$ で E の各点で f に近づくものが存在する. 函数 $f_n(x)$ は

$$f_n(x)=\sum_{j=1}^{k_n}\alpha_{nj}\chi_{E_{nj}}(x) \qquad (E_{nj}\in\mathfrak{M}) \tag{10. 3}$$

なる形に表わされる. ここに

$$j\neq k \text{ ならば } E_{nj}\frown E_{nk}=\phi. \tag{10. 4}$$

各 E_{nj} に対して，定理 8. 3 により $B_{nj}\subset E_{nj}$, $\mu(E_{nj}-B_{nj})=0$ なる集合 $B_{nj}\in\mathfrak{B}$ が存在する. $B=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k_n}B_{nj}\right)$ とおくと

$$E-B=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(E-\sum_{j=1}^{k_n}B_{nj}\right)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{k_n}(E_{nj}-B_{nj})$$

だから $\mu(E-B)=0$ である. 次に $A_{nj}=B_{nj}\frown B$ とおくと

$$\sum_{j=1}^{k_n}A_{nj}=\left(\sum_{j=1}^{k_n}B_{nj}\right)\frown B=B \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

であり，明らかに $B\in\mathfrak{B}$, $A_{nj}\in\mathfrak{B}$ $(j=1, \cdots, k_n;\ n=1, 2, \cdots)$ である. よって

$$g_n(x)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{k_n}\alpha_{nj}\chi_{A_{nj}}(x) & (x\in B)\\ 0 & (x\in E-B)\end{cases} \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots) \tag{10. 5}$$

なる函数 $g_n(x)$ は $\mathfrak{B}$-可測である. $x\in B$ ならば，各 n に対して x はどれか一つ且唯一つの A_{nj} に属するから $x\in A_{nj}\subset B_{nj}\subset E_{nj}$ となり，(10. 3), (10. 4), (10. 5) によって $g_n(x)=f_n(x)$ である. だから任意の $x\in E$ に対して $\{g_n(x)\}$ は n に関して単調増加であり，$g(x)=\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ が存在して $\mathfrak{B}$-可測函数となる（定理 10. 6). 一方 E の上で $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ であったから

$$\begin{cases}x\in B & \text{ならば } g(x)=f(x)\\ x\in E-B & \text{ならば } g(x)=0\end{cases}$$

となる. 従って E で $g(x)\leqq f(x)$ であり，$\mu(E(f\neq g))=\mu(E-B)=0$ である.

系. 上の定理の仮定のもとで，E の上の $\mathfrak{M}$-可測函数 $f(x)$ に対して，E の上の $\mathfrak{B}$-可測函数 $h(x)$ で $|h(x)|\geqq|f(x)|$, $\mu(E(h\neq f))=0$ なるものが存在する.

証明. f^+, f^- に対して，上の定理に述べたような g^+, g^- をそれぞれ作り，

---

*) 定理 10.1 の '可測'（$=\mathfrak{B}$-可測）を $\mathfrak{M}$-可測としてもよいことは明らかである.

$$h(x)=\begin{cases} g^+(x)-g^-(x) & x\in E(g^+=f^+)\frown E(g^-=f^-) \\ \infty & x\in E(g^+\neq f^+)\smile E(g^-\neq f^-) \end{cases}$$

とすれば，これが求めるものである.

問 2. $f(x)$ が集合 $E\in\mathfrak{B}$ の上で定義された実数値 $\mathfrak{B}$- 可測函数ならば，R^1 の中の任意の Borel 集合 B に対して集合 $E(f\in B)$ $(=\{x;\ f(x)\in B\})$ は $\mathfrak{B}$ に属する.

（ヒント．$E(f\in A)\in\mathfrak{B}$ となる A の全体が σ- 加法族をなし，すべての区間を含む.）

問 3. $f(x)$ が集合 $E\in\mathfrak{B}$ の上の実数値 $\mathfrak{B}$- 可測函数，$g(\lambda)$ が R^1 の上の実数値 $\mathfrak{B}_1$-可測函数ならば，合成函数 $h(x)=g(f(x))$ は E の上の $\mathfrak{B}$- 可測函数である.

問 4. R^N の Borel 集合 E で定義された連続函数は $\mathfrak{B}_N$- 可測である.

§11. Euclid 空間における Borel 可測函数と Lebesgue 可測函数

この§の内容は函数の可測性に関する重要な性質だからここで述べることにするが，次の§で積分の定義や性質を述べるのに直接必要ではないから，積分の定義などを先に知りたい場合はこの§を省略して以後の§へ進み，後に必要が起ってからこの§を参照されてもよい.

Euclid 空間 R^N における Lebesgue 測度を μ とし，Lebesgue 可測集合の全体を $\mathfrak{M}$, Borel 集合の全体を $\mathfrak{B}_N$ とすると，$\mathfrak{M}$ も $\mathfrak{B}_N$ も σ- 加法族であって $\mathfrak{M}\supset\mathfrak{B}_N$ である．一つの Lebesgue 可測集合の上で定義された函数 $f(x)$ が前§に述べた意味で $\mathfrak{M}$-可測であるとき $f(x)$ を **Lebesgue 可測函数**と呼ぶ．また一つの Borel 集合の上で定義された函数 $f(x)$ が前§の意味で $\mathfrak{B}_N$- 可測であるとき $f(x)$ を **Borel 可測函数**（または略して **B- 可測函数**或いは**可測 (B) な函数**）と言う．前§の各定理において $\mathfrak{B}$ を $\mathfrak{M}$ または $\mathfrak{B}_N$ でおきかえたものがすべて成り立つ．明らかに B- 可測函数は Lebesgue 可測であるが，$(R^N,\ \mathfrak{M},\ \mu)$ が $(R^N,\ \mathfrak{B}_N,\ \mu)$ の完備化（§8 参照）であるから，定理 10. 10 とその系をこの場合に言いなおすと次の定理を得る.

定理 11. 1. $f(x)$ が集合 $E\in\mathfrak{B}_N$ の上の Lebesgue 可測函数ならば，$f(x)$ と E の上でほとんどいたる所一致する B- 可測函数 $g(x)$, $h(x)$ で $|g(x)|\leqq|f(x)|\leqq|h(x)|$ なるものが存在する.

次に，R^N における Lebesgue 可測集合 E の上の連続函数が Lebesgue 可測函数であることは明らか（前§問 4 と同様）であるが，E の上の任意の Lebesgue 可測函数 $f(x)$ に対して E に含まれる閉集合 F を，$f(x)$ が F の上では連続でしかも $E-F$ の測度がどれだけでも小さいようにとることができる．すなわち

定理 11. 2 (Lusin（ルージン）の定理). $f(x)$ を Lebesgue 可測集合 $E\subset R^N$ の

上の実数値 Lebesgue 可測函数とすると，任意の $\varepsilon>0$ に対して適当な閉集合 $F\subset E$ をとり，$\mu(E-F)<\varepsilon$ であって $f(x)$ が F の上で連続であるようにできる．

証明. $\mu(E)<\infty$ と仮定し*) Eの上で $f(x)\geqq 0$ の場合に証明すればよい．

（第一段）$f(x)$ が単函数の場合．

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\chi_{E_j}(x) \qquad (E=E_1+\cdots+E_n)$$

とすると，各 E_j に対して閉集合 $F_j\subset E_j$ を $\mu(E_j-F_j)<\varepsilon/n$ なるようにとれる（定理 7. 5）．各 F_j の上では $f(x)$ は定数 α_j に等しいから連続である．$F_1, \cdots, F_n$ は互いに素な閉集合だから $f(x)$ は $F=F_1+\cdots+F_n$ の上で連続で**) F は閉集合であり

$$\mu(E-F)=\sum_{j=1}^{n}\mu(E_j-F_j)<\varepsilon.$$

（第二段）一般の場合．定理 10. 1 により，可測単函数列 $\{f_n(x)\}$ で $f(x)$ に E の各点で収束するものが存在する．各 $f_n(x)$ に対して第一段により閉集合 $F_n\subset E$ が存在して，$\mu(E-F_n)<\varepsilon/2^{n+1}$ であって $f_n(x)$ は F_n で連続である．$F_0=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$ とおくと，$f_n(x)$ はすべて F_0 の上で連続であり

$$\mu(E-F_0)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E-F_n)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

F_0 の上で $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ だから，定理 10. 9 とその系により適当な閉集合 $F\subset F_0$ をとれば，$\mu(F_0-F)<\varepsilon/2$ であって $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に F の上で一様収束する．$f_n(x)$ がすべて F_0 で，従って F で連続だから $f(x)$ も F で連続である．しかも

$$\mu(E-F)\leqq\mu(E-F_0)+\mu(F_0-F)<\varepsilon. \qquad \text{（証明終）}$$

次に直積空間の上の函数の可測性に関する定理を述べる．

定理 11. 3. $(X, \mathfrak{B}_X)$ を任意の可測空間とし，X と R^N との直積空間 $Z=X\times R^N$ において直積 σ-加法族 $\mathfrak{B}_Z=\mathfrak{B}_X\times\mathfrak{B}_N$（§9 参照）を定義する．$Z$ の上の函数 $f(x, y)$ $(x\in X, y\in R^N)$ があって

i）y を固定すれば x の函数として $\mathfrak{B}_X$-可測であり，

ii）x を固定すれば y の函数として連続である

ならば $f(x, y)$ は $(x, y)\in Z$ の函数として $\mathfrak{B}_Z$-可測である．

この定理はそれ自身もその証明（下記）の考え方も重要であるから，証明をよく理解していただくために，(I) $R^N=R^1$ の場合の証明をまず述べてから (II) 一般の場合の証明

---

*) 270 頁の補注参照．

**) 付録 §1, 定理 8.

を述べる．ただし (II) の証明中には (I) の結果は使わないから，論理的には (II) だけ述べればよいわけで読者諸氏も (II) だけ読まれてもよい．しかし証明の本質はまずはじめに (I) を読まれる方が理解しやすいであろう．

定理 11. 3 の証明． I) R^N が R^1 の場合．函数 $f_n(x, y)$ $(n=1, 2, \cdots)$ を

$$\frac{k-1}{n}<y\leqq\frac{k}{n} \text{ のとき } f_n(x, y)=f\left(x, \frac{k}{n}\right) \qquad (k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

によって定義すると，$f_n(x, y)$ は $\mathfrak{B}_Z$-可測函数である．なぜならば任意の実数 a に対して

$$(11.\ 1) \qquad \{(x, y)\,;\, f_n(x, y)<a\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{x\,;\, f\left(x, \frac{k}{n}\right)<a\right\}\times\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$$

となり，仮定 i) により $\left\{x\,;\, f\left(x, \frac{k}{n}\right)<a\right\}\in\mathfrak{B}_X$ だからである．ところが各点 y に対して $\frac{k-1}{n}<y\leqq\frac{k}{n}$ となるような $\frac{k}{n}$ は $n\to\infty$ のとき y に近づくから，仮定 ii) により

$$(11.\ 2) \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x, y)=f(x, y) \qquad (\text{各点 } (x, y) \text{ において}).$$

だから定理 10. 6 により $f(x, y)$ は $\mathfrak{B}_Z$-可測である．(R^1 の場合 証明終)

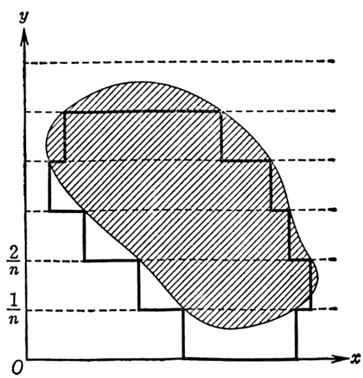
上の $f_n(x, y)$ の作り方は y の空間 R^1 を長さ $\frac{1}{n}$ の区間に分けて，x を任意に固定したとき，y がその $\frac{1}{n}$ 区間にある間は $f_n(x, y)$ がその区間の上端における $f(x, y)$ の値に等しいように定めたものである．このとき上の式 (11. 1) の意味は，例えば集合

$$\{(x, y)\,;\, f(x, y)<a\}$$

が右の図の斜線のある部分ならば，集合

$$\{(x, y)\,;\, f_n(x, y)<a\}$$

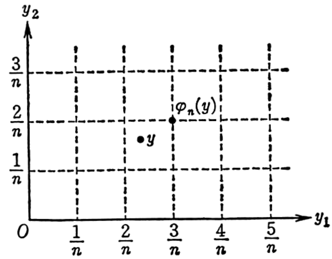
は太い線で囲まれた部分である．この図は $f_n(x, y)$ の可測性の直観的説明である．y の空間の分割を細かくして行けば，y に関する連続性によって $f_n(x, y)$ が $f(x, y)$ に近づくのである．なお上の $f_n(x, y)$ の定義は，



$$\frac{k-1}{n}<y\leqq\frac{k}{n} \text{ のとき } \varphi_n(y)=\frac{k}{n} \qquad (k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

と定義して $f_n(x, y)=f(x, \varphi_n(y))$ とおけばよい．このとき上の証明の最後の部分は，

'$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(y)=y$ だから仮定 ii) によって $\lim_{n\to\infty} f_n(x, y)=f(x, y)$' となる．以上の考え方を使って i) の証明を R^N の場合に拡張する．y と $\varphi_n(y)$ との関係を R^2 の場合の例を示すと右の図のようになる．



II)　一般の場合．函数 $f_n(x, y)$ $(n=1, 2, \cdots)$ を

$$f_n(x, y)=f(x, \varphi_n(y))$$

で定義する，ここに $\varphi_n(y)$ は R^N で定義されて R^N の点の値をとる函数で

$$y=(y_1, \cdots, y_N),\quad \frac{k_\nu-1}{n}<y_\nu\leqq\frac{k_\nu}{n}\qquad (\nu=1, \cdots, N)$$

のときに

$$\varphi_n(y)=\left(\frac{k_1}{n}, \cdots, \frac{k_N}{n}\right)$$

となるものである；k はすべての整数（正，零，負）を動く．このとき

$$f_n(x, y)\equiv f_n(x, y_1, \cdots, y_N)$$

は $\mathfrak{B}_Z$- 可測である．なぜならば，任意の実数 a に対して

$$\{(x, y_1, \cdots, y_N);\ f_n(x, y)<a\}$$
$$=\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{k_N=-\infty}^{\infty}\left\{x;\ f\left(x, \frac{k_1}{n}, \cdots, \frac{k_N}{n}\right)<a\right\}\times\left(\frac{k_1-1}{n}, \frac{k_1}{n}\right]\times\cdots\times\left(\frac{k_N-1}{n}, \frac{k_N}{n}\right]$$

となり，仮定 i) によって $\left\{x;\ f\left(x, \frac{k_1}{n}, \cdots, \frac{k_N}{n}\right)<a\right\}\in\mathfrak{B}_X$ となるからである．ところが y と $\varphi_n(y)$ とは辺の長さが $\frac{1}{n}$ の同じ立方体（N 次元の）に属するから $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(y)=y$ となる．だから仮定 ii) により

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x, y)=\lim_{n\to\infty} f(x, \varphi_n(y))=f(x, y).$$

だから定理 10. 6 により $f(x, y)$ は $\mathfrak{B}_Z$- 可測である．（証明終）

定理 11. 4. $f(x)$ が R^N の上の B- 可測函数ならば $f(x+y)$, $f(x-y)$ $(x, y\in R^N$; $+$, $-$ は R^N のベクトルとしての算法）は R^{2N} の上の B- 可測函数である．

証明．以下複号 ± は同時に同符号をとる．$h(x, y)=f(x\pm y)$ とおく．

（第一段）$f(x)$ が R^N で連続ならば，$h(x, y)$ は R^{2N} で連続だからもちろん B- 可測である（前 §, 問 4）．$f(x)$ が開集合 $G\subset R^N$ の定義函数である場合に，この定理が成り立つことを証明する．

$$f_n(x)=\min\{n\cdot\rho(x,\ G^c),\ 1\}^{*)}\quad (\rho \text{ は点と集合との距離}^{**)})$$

とすると，$f_n(x)$ は R^N で連続だから $h_n(x,\ y)=f_n(x\pm y)$ は R^{2N} で B-可測である．ところが $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ だから

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x,\ y)=\lim_{n\to\infty} f_n(x\pm y)=f(x\pm y)\ =h_A(x,\ y).$$

従って $h(x,\ y)$ も R^{2N} で B-可測である．

（第二段）$\mathfrak{A}=\{A;\ A\subset R^N,\ h_A(x,\ y)=\chi_A(x\pm y)$ が R^{2N} で B-可測$\}$ （$\chi_A(x)$ は集合 A の定義函数）とおくとき，$\mathfrak{A}$ が σ-加法族であることを証明する．まず $\phi\in\mathfrak{A}$ は明らか．次に $A\in\mathfrak{A}$ ならば，$h_{A^c}(x,\ y)=\chi_{A^c}(x\pm y)=1-\chi_A(x\pm y)=1-h(x,\ y)$ だから $A^c\in\mathfrak{A}$．また $A_n\in\mathfrak{A}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，$A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ならば，

$$h_A(x,\ y)=\chi_A(x\pm y)=\sup_{n\geqq 1}\chi_{A_n}(x\pm y)=\sup_{n\geqq 1} h_{A_n}(x,\ y)$$

だから $A\in\mathfrak{A}$ となる．

（第三段）定理の証明．$\mathfrak{A}$ を第二段の通りとすると，第一段により R^N の開集合の全体 $\mathfrak{O}_N$ は $\mathfrak{A}$ に含まれるから，$\mathfrak{B}_N=\mathfrak{B}[\mathfrak{O}_N]\subset\mathfrak{A}$ （§6）．すなわち任意の Borel 集合 $E\subset R^N$ の定義函数に対しては定理が成立するから，そのような函数の有限個の和であるところの B-可測単函数に対して定理が成立する．従って定理 10．1 とその前の注意 1 とにより，R^N の上の任意の B-可測函数に対して定理が成立する．（証明終）

問 1． R^1 の上の右連続な函数は B-可測である．（ヒント，右連続函数 $f(x)$ に対して，$\frac{k-1}{2^n}<x\leqq\frac{k}{2^n}$ ならば $f_n(x)=f\left(\frac{k}{2^n}\right)$ （k は任意の整数$\gtreqless 0$）を考えよ）．

問 2． $f(x)$ を Lebesgue 可測集合 $E\,(\subset R^N)$ の上で定義された函数とする．任意の $\varepsilon>0$ に対して $\mu(E-F_\varepsilon)<\varepsilon$ なる閉集合 $F_\varepsilon\subset E$ が存在して f が F_ε の上で連続になるならば，f は E の上で Lebesgue 可測である．（定理 11．2 の逆）

問 3． $0<x\leqq 1,\ 0<y\leqq 1$ で定義された函数 $f(x,\ y)$ があって，

$$\begin{cases} y \text{ を固定すれば } x \text{ の函数として Lebesgue 可測であり，} \\ x \text{ を固定すれば } y \text{ の函数として単調増加である} \end{cases}$$

ならば，$f(x,\ y)$ は $(x,\ y)$ の Lebesgue 可測函数である．

ヒント．区間 $0<y\leqq 1$ を 2^n 等分して，定理 11．3 の証明と同様に考える．すなわち任意の実数 a に対して $K(a)=\{(x,\ y);\ f(x,\ y)<a\}$ とし，

$$A_n(a)=\sum_{k=1}^{2^n}\left\{x;\ f\left(x,\ \frac{k}{2^n}\right)<a\right\}\times\left(\frac{k-1}{2^n},\ \frac{k}{2^n}\right]$$

---

*) 62 頁の脚注参照．

**) 付録 §3，例 2 参照．

$$B_n(a)=\sum_{k=1}^{2^n}\left\{x;\ f\left(x,\ \frac{k-1}{2^n}\right)<a\right\}\times\left(\frac{k-1}{2^n},\ \frac{k}{2^n}\right]$$

とすると，仮定により $A_n(a)\subset K(a)\subset B_n(a)$ であり，2^n 等分法を使っているから集合列 $\{A_n(a)\}$，$\{B_n(a)\}$ はそれぞれ単調増加，単調減少である.*) さらに仮定を使って，$B_n(a)-A_n(a)$ の測度が $1/2^n$ を超えないことを出せ.

注意 1. 定理 11. 4 において $f(x)$ が R^N で Lebesgue 可測とすると，$f(x\pm y)$ は R^{2N} で Lebesgue 可測になるのであるが，このことの証明には Fubini の定理が必要である.**)

注意 2. 二つの B- 可測函数の合成函数は B- 可測である（前§ 問 3）が，二つの Lebesgus 可測函数の合成函数は必ずしも Lebesgue 可測にならない.

反例. $\varphi(x)$ を Cantor 函数（§7）とし，$X=[0,1]$ の上の函数 $f(x)$ を

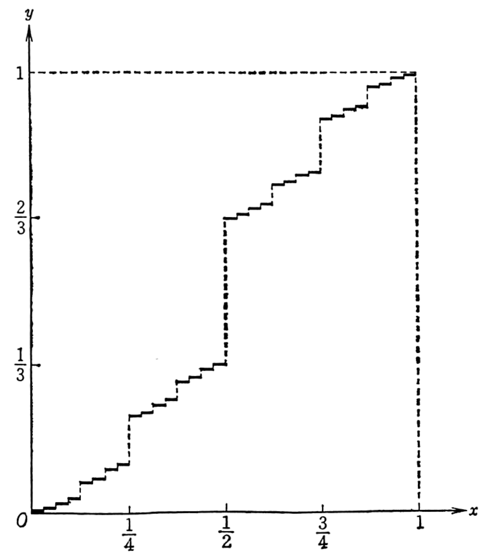
$$f(x)=\inf\ \{y;\ \varphi(y)=x\}$$

で定義する. すなわち Cantor 函数のグラフ（§7 を見よ）の縦と横とを入れかえた曲線を書き，$x=k/2^n$ の所では曲線が垂直な線分になるからその線分の下端を $f(x)$ の値とすれば，$f(x)$ のグラフが得られる（右図）. 次に $\{x;\ 0<x\leqq 1\}$ の中に §8 で述べた方法で構成した非可測集合を A とし，

$$B=\{f(x);\ x\in A\}$$

とする. これは y 軸の上の Cantor 集合の部分集合である.（§7 の Cantor 函数 $\varphi(x)$ のグラフと右の $f(x)$ のグラフとを比較せよ.）だから B は零集合，従って Lebesgue 可測集合である. だから，函数 $g(y)$ を

（この図は $f(x)$ のグラフの大体の形である. 正確なグラフは描ききれない！）



$$g(y)=\begin{cases}0 & (y\in B\ \text{のとき})\\ 1 & (y\notin B\ \text{のとき})\end{cases}$$

---

*) n 等分法によったのでは単調列にならない.

**) §15，問 2 参照.

と定義すると，これは Lebesgue 可測函数である．一方 $f(x)$ は単調増加函数だから明らかに B-可測，従ってもちろん Lebesgue 可測である．しかし合成函数

$$h(x)=g(f(x))$$

は Lebesgue 可測ではない．なぜならば

$$\left\{x;\ h(x)<\frac{1}{2}\right\}=\{x;\ f(x)\in B\}=A$$

となるからである．（反例終）

上の例からわかるように，f が B-可測であっても，g が Lebesgue 可測なことだけしかわからないときは，合成函数 $h(x)=g(f(x))$ は Lebesgue 可測にさえなるとは限らない．反対に f が Lebesgue 可測で g が B-可測なら，$h(x)=g(f(x))$ は Lebesgue 可測である（証明は前§問 3 と同様にしてできる）．これらの関係を表にすると次のようになる．（L-可測は Lebesgue 可測の意味）

$y=f(x)$	$z=g(y)$	$z=h(x)\equiv g(f(x))$
B-可測	B-可測	B-可測
L-可測	B-可測	L-可測
B-可測	L-可測	可測性は不定
L-可測	L-可測	可測性は不定

注意 3. 定理 11. 3 において仮定を

$$\begin{cases} y \text{ を固定すれば } x \text{ の函数として } \mathfrak{B}_X\text{-可測}, \\ x \text{ を固定すれば } y \text{ の函数として } \mathfrak{B}_N\text{-可測} \end{cases}$$

としたのでは，$f(x,\ y)$ は必ずしも $\mathfrak{B}_Z$-可測にならない．

反例は後に Fubini の定理を使って構成する（§15）．

§12. 積分の定義と性質

空間 X と，その部分集合の σ-加法族 $\mathfrak{B}$ と，$\mathfrak{B}$ の上の測度 μ とが与えられたとする．

集合 $E\in\mathfrak{B}$ と，E の上の $\mathfrak{B}$-可測函数 $f(x)$ とがあるとき，$f(x)$ の測度 μ による E の上での積分 $\int_E f(x)d\mu(x)$ を定義しよう．誤解の恐れのないときは，その積分を $\int_E fd\mu$ または $\int fd\mu$ とだけ書くこともある．また $\int_E f(x)\mu(dx)$ と書く人もある．今後この§で出てくる集合はすべて $\mathfrak{B}$ に属し，また函数はすべて $\mathfrak{B}$-可測なものとするから，一々そのことを書かない．

積分の定義

I. $f(x)\geqq 0$ の場合．

i)　$f(x)$ が単函数のときは

(12. 1)　　$f(x)=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\chi_{E_j}(x)$，ただし $\begin{cases}E=E_0+E_1+\cdots+E_n\\ \alpha_0=0<\alpha_j\ (j\geqq 1)\end{cases}$

と表わされる．このような $f(x)$ に対して

(12. 2)
$$\int_E f d\mu=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu(E_j)$$

と定義する．*) この定義が意味をもつためには，(12. 2) の右辺の値が $f(x)$ の (12. 1) のような表わし方に無関係なことを示さなければならない．今 $f(x)$ が (12. 1) のほかに

(12. 1′)　　$f(x)=\sum_{k=0}^{m}\beta_k\chi_{F_k}(x)$，$\begin{cases}E=F_0+F_1+\cdots+F_m\\ \beta_0=0<\beta_k\ (k\geqq 1)\end{cases}$

とも表わされたとすると，$E_j\frown F_k\neq\phi$ ならば $\alpha_j=\beta_k$ である．よって，$\mu(E_j\frown F_k)=\infty$ なる j，$k\geqq 1$ が存在する場合は，その j，k に対しては $\mu(E_j)=\mu(F_k)=\infty$ だから

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu(E_j)=\infty=\sum_{k=1}^{m}\beta_k\mu(F_k).$$

またすべての j，$k\geqq 1$ に対して $\mu(E_j\frown F_k)<\infty$ ならば，$\alpha_0=\beta_0=0$ によって

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu(E_j)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{m}\alpha_j\mu(E_j\frown F_k)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}\beta_k\mu(F_k\frown E_j)=\sum_{k=1}^{m}\beta_k\mu(F_k).$$

だから (12. 1′) を使っても，対応する (12. 2) の右辺の値は変らない．

一般の $f(x)\geqq 0$ に対する積分を定義する前に，次の三つの補助定理を述べておく．

補助定理 1. 1°)　f，g がともに E の上の単函数 $\geqq 0$ ならば

$$\int_E(f+g)d\mu=\int_E fd\mu+\int_E gd\mu.$$

2°)　f が E の上の単函数 $\geqq 0$ で $E\supset A+B$ ならば $\int_{A+B}fd\mu=\int_A fd\mu+\int_B fd\mu.$

証明. 1°) 仮定により

$$f=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\chi_{F_j},\quad g=\sum_{k=0}^{m}\beta_k\chi_{G_k};\ \begin{cases}E=F_0+F_1+\cdots+F_n=G_0+G_1+\cdots+G_m\\ \alpha_0=0<\alpha_j,\ \beta_0=0<\beta_k\ (j,\ k\geqq 1)\end{cases},$$

---

*)　$j=0$ に対する項は (12. 1) にも (12. 2) にも関係しないから，(12. 1) をはじめから $f=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\chi_{E_j}$，$(E\supset E_1+\cdots+E_n$，$\alpha_j>0)$ と書いておいても，この定義だけはできるが，そうしておくと後の補助定理 1 の証明の記述に不便であるから，(12. 1) は $\sum_{j=0}^{n}$ の形に書いておく．

と表わされ, $f+g$ も単函数で

$$f+g=\sum_{j,k}(\alpha_j+\beta_k)\chi_{F_j\cap G_k}\qquad\begin{pmatrix}j=k=0 \text{ のときにかぎり}\\ \alpha_j+\beta_k=0 \text{ となる}\end{pmatrix}$$

と表わされる. よって $\mu(F_j)=\infty$ なる $j\geqq 1$ がある場合は, 少なくも一つの $k\,(0\leqq k\leqq m)$ に対して $\mu(F_j\frown G_k)=\infty$ となるから, $\int_E(f+g)d\mu=\infty=\int_E fd\mu+\int_E gd\mu$ が成立する. $\mu(G_k)=\infty$ なる $k\geqq 1$ がある場合も同様である. またすべての $j,\ k\geqq 1$ に対して $\mu(F_j)<\infty,\ \mu(G_k)<\infty$ なる場合は, $\alpha_0=\beta_0=0$ によって

$$\begin{aligned}\int_E(f+g)d\mu&=\sum_{(j,k)\neq(0,0)}(\alpha_j+\beta_k)\mu(F_j\frown G_k)\\&=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\sum_{k=0}^{m}\mu(F_j\frown G_k)+\sum_{k=1}^{m}\beta_k\sum_{j=0}^{n}\mu(G_k\frown F_j)\\&=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu(F_j)+\sum_{k=1}^{m}\beta_k\mu(G_k)=\int_E fd\mu+\int_E gd\mu.\end{aligned}$$

2°) $f=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\chi_{E_j},\ E=E_0+E_1+\cdots+E_n,\ \alpha_0=0<\alpha_j\ (j\geqq 1)$ とすると

$$\begin{aligned}\int_{A+B}fd\mu&=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu(E_j\frown(A+B))\\&=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu(E_j\frown A)+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu(E_j\frown B)=\int_A fd\mu+\int_B fd\mu.\end{aligned}$$

補助定理 2. $f_n\ (n=1,2,\cdots)$ も g も E の上の単函数 $\geqq 0$, $\{f_n\}$ は n について単調増加で $\lim_{n\to\infty}f_n\geqq g$ (E の各点 x で) ならば

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu\geqq\int_E gd\mu. \tag{12. 3}$$

証明. $E_0=E(g=0),\ F=E-E_0$ とおくと, 単函数の積分の定義と補助定理 1 により

$$\int_E f_nd\mu=\int_{E_0}f_nd\mu+\int_F f_nd\mu\geqq\int_F f_nd\mu,\quad \int_E gd\mu=\int_{E_0}gd\mu+\int_F gd\mu=\int_F gd\mu$$

だから, $\lim_{n\to\infty}\int_F f_nd\mu\geqq\int_F gd\mu$ なることを示せばよい. よって, はじめから E の上で $g(x)>0$ として証明すればよい. このとき

$$g(x)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\chi_{E_j}(x)\qquad(0<\alpha_j<\infty)$$

と表わされるから, $\alpha=\min\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\},\ \beta=\max\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ とおくと,

$$0<\alpha\leqq g(x)\leqq\beta<\infty.$$

だから, $0<\varepsilon<\alpha$ なる任意の ε をとると $g-\varepsilon$ は単函数 >0. また

$$F_n=E(f_n>g-\varepsilon),\qquad n=1,\ 2,\ \cdots,$$

とおくと，$\{f_n\}$ が単調増加で $\lim_{n\to\infty} f_n \geqq g$ なることにより

$$\{F_n\}\ \text{は単調増加で}\ \lim_{n\to\infty} F_n=E,\ \text{従って}\ \lim_{n\to\infty}\mu(F_n)=\mu(E).$$

ここで次の二つの場合に分けて証明する．

1°)　$\mu(E)<\infty$ のときは $\lim_{n\to\infty}\mu(E-F_n)=\mu(E)-\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)=0$ だから，はじめの ε に対して n_0 が存在して

$$n\geqq n_0\ \text{ならば}\ \mu(E-F_n)<\varepsilon.$$

だから補助定理 1 を使って

$$\begin{aligned}\int_E f_n d\mu &\geqq \int_{F_n} f_n d\mu \geqq \int_{F_n}(g-\varepsilon)d\mu=\int_{F_n} g d\mu-\varepsilon\mu(F_n)\\ &\geqq \int_E g d\mu-\int_{E-F_n} g d\mu-\varepsilon\mu(E)\\ &\geqq \int_E g d\mu-\beta\mu(E-F_n)-\varepsilon\mu(E)\\ &>\int_E g d\mu-\varepsilon\{\beta+\mu(E)\}.\end{aligned}$$

この最後の形は n に無関係だから，$n\to\infty$ として

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu\geqq\int_E g d\mu-\varepsilon\{\beta+\mu(E)\}.$$

ここで $\beta+\mu(E)<\infty$ で ε は 0 にいくらでも近くとれるから (12. 3) が成立する．

2°)　$\mu(E)=\infty$ のときは

$$\int_E f_n d\mu\geqq\int_{F_n} f_n d\mu\geqq\int_{F_n}(g-\varepsilon)d\mu\geqq(\alpha-\varepsilon)\mu(F_n);$$

$n\to\infty$ として $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu\geqq(\alpha-\varepsilon)\mu(E)=\infty\geqq\int_E g d\mu$ となるから，(12. 3) が成立する．

補助定理 3. E の上の負にならない単函数の列 $\{f_n\}$，$\{g_n\}$ があり，どちらも n について単調増加であって $\lim_{n\to\infty} f_n=\lim_{n\to\infty} g_n$ （極限函数は単函数とは限らない）とすると

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E g_n d\mu. \tag{12. 4}$$

証明．任意の m を固定するとき，仮定により $\lim_{n\to\infty} f_n\geqq g_m$ だから，補助定理 2 により $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu\geqq\int_E g_m d\mu$; この左辺は m に無関係だから，$m\to\infty$ として

(12. 5)
$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu \geqq \lim_{m\to\infty}\int_E g_m d\mu.$$

また任意の n を固定するとき $\lim_{m\to\infty} g_m \geqq f_n$ だから，上と同様にして

(12. 6)
$$\lim_{m\to\infty}\int_E g_m d\mu \geqq \lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu.$$

(12. 5) と (12. 6) とから (12. 4) を得る．（証明終）

ii) 次に一般の負にならない函数 $f(x)$ に対して積分を定義する．定理 10. 1 により，単函数 $f_n(x)\geqq 0$ の単調増加列で $f(x)$ に近づくもの $\{f_n\}$ が存在する．このとき，単函数の積分の定義により，$\int_E f_n d\mu$ も n について単調増加である．よって

(12. 7)
$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu$$

と定義する．この右辺の極限値は，上の補助定理 3 によって，f に近づく単函数の単調増加列 $\{f_n\}$ のとり方には関係しない．よって (12. 7) は f の積分の定義として意味をもつ．ここで，補助定理 1 の拡張として

補助定理 4. 1°) E の上で f, $g\geqq 0$ ならば

(12. 8)
$$\int_E (f+g)d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

2°) E の上で $f\geqq 0$ で，$A+B\subset E$ ならば

(12. 9)
$$\int_{A+B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

証明. 1°) 定理 10. 1 により，単函数の単調増加列 $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ で，各点 $x\in E$ で

$$f_n(x)\geqq 0,\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),\quad g_n(x)\geqq 0,\quad \lim_{n\to\infty} g_n(x)=g(x)$$

となるものが存在する．このとき $\{f_n+g_n\}$ も単函数の単調増加列で，各点 $x\in E$ で

$$f_n(x)+g_n(x)\geqq 0,\quad \lim_{n\to\infty}\{f_n(x)+g_n(x)\}=f(x)+g(x)$$

となる．補助定理 1 の 1°) により各 n に対して

$$\int_E (f_n+g_n)d\mu = \int_E f_n d\mu + \int_E g_n d\mu$$

だから，$n\to\infty$ とすると上に述べた積分の定義 (12. 7) により (12. 8) を得る．

2°) も同様にして補助定理 1 の 2°) を使って証明される．

II. 一般の函数 $f(x)$ に対する積分 $\int_E f d\mu$ を定義しよう．任意の函数 $f(x)$ $(-\infty \leqq f(x)\leqq \infty)$ に対して，§10 で述べたように

$$f^+(x)=\max\{f(x),\ 0\},\quad f^-(x)=\max\{-f(x),\ 0\}$$

とすると，$f(x)$ は

$$f(x)=f^+(x)-f^-(x),\quad f^+(x)\geqq 0,\quad f^-(x)\geqq 0$$

と書けて，上の I によって

$$\int_E f^+ d\mu,\qquad \int_E f^- d\mu$$

が定義される．この二つの値のうち少なくも一方が有限のとき，そのときにかぎり $f(x)$ は E の上で**定積分をもつ**といい，

$$\int_E f\,d\mu=\int_E f^+ d\mu-\int_E f^- d\mu \tag{12. 10}$$

と定義して，この値を E の上での f の**定積分**（**の値**）という．またこの定積分の値が有限のとき，$f(x)$ は E の上で（測度 μ について）**積分可能**あるいは**可積分**であるという．

$f(x)$ が複素数値函数のときは，$\Re f(x)$ と $\Im f(x)$ とがともに E の上で積分可能のとき，そのときにかぎり，積分を

$$\int_E f\,d\mu=\int_E \Re f\,d\mu+i\int_E \Im f\,d\mu \qquad (i \text{ は虚数単位})$$

によって定義し，このとき $f(x)$ は E の上で積分可能あるいは可積分であるという．

特に μ を R^N の上の Lebesgue 測度とするとき，Lebesgue 可測集合 $E(\subset R^N)$ の上の Lebesgue 可測函数 $f(x)$ に対して，上の方法で定義した積分 $\int_E f\,d\mu$ を **Lebesgue 積分**といい，$\int_E f(x)dx$ と書くのが普通である．（μ が 1 次元空間 R^1 の上の Lebesgue 測度で，E が区間 $(a,\ b]$ のときは $\int_a^b f(x)dx$ とも書く．）その積分の値が有限のとき，f は E で **Lebesgue 積分可能**であるという．なお，はじめに述べた一般の測度空間での積分を Lebesgue 式積分または単に Lebesgue 積分ということもある．（本書の標題の‘ルベーグ積分’はこの最後に述べた意味である．）

$f(x)$ が E の上で可積分なことは，$|f(x)|$ が E の上で可積分なことと同等である．（このことは，$-\infty\leqq f(x)\leqq\infty$ のときは定義から明らか；$f(x)$ が複素数値のときも

$$\left.\begin{array}{l}|\Re f(x)|\\ |\Im f(x)|\end{array}\right\}\leqq|f(x)|\leqq|\Re f(x)|+|\Im f(x)|$$

によってわかる．）また，$f(x)$ が E で積分可能ならば，E の上で $|g(x)|\leqq|f(x)|$ を満たす任意の可測函数 $g(x)$ は E で積分可能である．

次の問 1 は，上の積分の定義（と連続函数の Riemann 積分の定義）だけから，容易に

証明できる.

問 1. i) R^N の中の有界閉区間 K の上で $f(x)$ が連続ならば, K の上での $f(x)$ の Lebesgue 積分は Riemann 積分に等しい.

ii) R^N の中の開区間 J (無限区間でもよい) で $f(x)$ が連続で $\geqq 0$ ならば, J の上での $f(x)$ の Lebesgue 積分 (値が ∞ になる場合を含む) は広義 Riemann 積分に等しい.

注意 1. 一般に, Riemann 積分可能 (狭義) な函数は Lebesgue 積分可能であって, 両方の積分が一致することを後に (§16) 示す. しかし, $f(x)$ が広義 Riemann 積分可能 (有限) でも, $f(x)\geqq 0$ とかぎらないときは Lebesgue 積分可能でないことがある. 例えば $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ は $(0, \infty)$ で広義 Riemann 積分可能*) であるが $\int_0^\infty |f(x)|dx$ は収束しない.**) だから $f(x)$ は $(0, \infty)$ で Lebesgue 積分可能でない.

積分の性質

定理 12. 1. f が E の上で積分可能ならば $\left|\int_E f d\mu\right| \leqq \int_E |f| d\mu$ (f は $-\infty\leqq f(x)\leqq\infty$ でも複素数値でもよい).

このことは, $-\infty\leqq f(x)\leqq\infty$ のときは積分の定義から明らかである. f が複素数値のときは, $\varphi(x)$ を, $f(x)\neq 0$ ならば $\varphi(x)=f(x)/|f(x)|$, $f(x)=0$ ならば $\varphi(x)=0$ と定義し, $a=\int_E f d\mu$, $\alpha=\dfrac{a}{|a|}$ とおくと,***) $|a|=\int_E |f|\bar{\alpha}\varphi d\mu$ が得られるから, この両辺の実数部分をとればよい. くわしい証明は演習問題とする.

問 2. 上の定理を証明せよ.

前に述べた積分の定義により, これから後に述べる積分の性質においては, 複素数値函数の場合は実数値函数の場合に容易に帰着されるから, 今後ことわらなければ $-\infty\leqq f(x)\leqq\infty$ なる函数 $f(x)$ のみを考えているものとする.

定理 12. 2. 1°) $\mu(E)=0$ ならば, 任意の函数 $f(x)$ に対して $\int_E f d\mu=0$.

2°) f が E の上で積分可能ならば, $\mu(E(f=\infty))=\mu(E(f=-\infty))=0$.

証明. 1°) は積分の定義から明らかである.

2°) の証明. $E(f=\infty)=E_0$ とおくと, 補助定理 4 により, 任意の $\alpha>0$ に対して

$$\int_E f^+ d\mu=\int_{E_0} f^+ d\mu+\int_{E-E_0} f^+ d\mu\geqq\int_{E_0}\alpha d\mu=\alpha\mu(E_0).$$

---

*) 例えば, 三村征雄編: 大学演習微分積分学 (裳華房), 137 頁.

**) 同上書, 138 頁.

***) $a=0$ ならば定理は自明であるから, $a\neq 0$ とする.

仮定により $0 \leqq \int_E f^+ d\mu < \infty$ であって，α は任意に大きくとれるから $\mu(E_0)=0$，すなわち $\mu(E(f=\infty))=0$．同様にして $\mu(E(f=-\infty))=0$ も証明できる．

補助定理 5. f が E の上で積分可能ならば，任意の実数 α に対して，αf も E の上で積分可能であって $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$.

このことは積分の定義から明らかである．

定理 12. 3. 1°) f, g が E で積分可能ならば，$f+g$ も E で積分可能であって

$$\int_E (f+g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu. \tag{12. 11}$$

2°) $E=A+B$ であって，f が A, B それぞれの上で積分可能ならば，f は E で積分可能で

$$\int_E f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu. \tag{12. 12}$$

証明．はじめに 2°) を証明する．補助定理 4 により

$$\int_E f^+ d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_B f^+ d\mu, \quad \int_E f^- d\mu = \int_A f^- d\mu + \int_B f^- d\mu ;$$

この二つの式の右辺の各項は仮定によって有限である．だから f は E で積分可能で

$$\begin{aligned}\int_E f d\mu &= \int_A f^+ d\mu + \int_B f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu - \int_B f^- d\mu \\ &= \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu + \int_B f^+ d\mu - \int_B f^- d\mu \\ &= \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.\end{aligned}$$

次に 1°) を証明する．

$$E_{11}=E(f\geqq 0,\ g\geqq 0), \qquad E_{12}=E(f\geqq 0,\ g<0),$$
$$E_{21}=E(f<0,\ g\geqq 0), \qquad E_{22}=E(f<0,\ g<0)$$

とおくと，

$$E=E_{11}+E_{12}+E_{21}+E_{22}.$$

だから，上に証明した 2°) により，各 E_{jk} の上で 1°) を証明すればよい．各 E_{jk} の上では f, g は一定符号だから，はじめから E で f, g が一定符号の場合に帰着される．さらに f, g が同符号ならば，補助定理 4 の 1°) によってこの定理の 1°) は明らかである．よって $f\geqq 0\geqq g$ の場合を証明しよう．($f\leqq 0\leqq g$ の場合も同様である．) まず

$$A=E(f+g\geqq 0), \qquad B=E(f+g<0)$$

とおく．このとき，A において

$$f=(f+g)+(-g),\quad f+g\geqq 0,\quad -g\geqq 0$$

であるから，補助定理 4 と補助定理 5 ($\alpha=-1$ の場合) とにより

$$\int_A f\,d\mu=\int_A (f+g)\,d\mu+\int_A (-g)\,d\mu=\int_A (f+g)\,d\mu-\int_A g\,d\mu.$$

だから

$$(0\leqq)\int_A (f+g)\,d\mu=\int_A f\,d\mu+\int_A g\,d\mu<\infty. \tag{12. 13}$$

また B において

$$-g=f+\{-(f+g)\},\quad f\geqq 0,\ -(f+g)\geqq 0$$

となることを使うと，上と同様にして

$$(0\geqq)\int_B (f+g)\,d\mu=\int_B f\,d\mu+\int_B g\,d\mu>-\infty. \tag{12. 14}$$

(12. 13) と (12. 14) とにより，$f+g$ は E で積分可能であって，はじめに証明した 2°) を再び使って

$$\begin{aligned}\int_E (f+g)\,d\mu&=\int_A f\,d\mu+\int_B f\,d\mu+\int_A g\,d\mu+\int_B g\,d\mu\\&=\int_E f\,d\mu+\int_E g\,d\mu;\end{aligned}$$

すなわち (12. 11) が成立する．

系 1. $f,\ g$ が E で積分可能な函数ならば，任意の実数 $\alpha,\ \beta$ に対して，$\alpha f+\beta g$ は E で積分可能であって

$$\int_E (\alpha f+\beta g)\,d\mu=\alpha\int_E f\,d\mu+\beta\int_E g\,d\mu.$$

このことは，補助定理 5 と上の定理の 1°) とから明らかである．

系 2. f と g とは E の上でほとんどいたる所一致する函数であるとする．このとき，f が E で積分可能ならば，g も E で積分可能であって $\int_E f\,d\mu=\int_E g\,d\mu$.

証明. $E_1=(f>g)$，$E_2=E(f=g)$，$E_3=E(f<g)$ とすると，$\mu(E_1+E_3)=0$. だから，上の定理の 2°) と定理 12. 2 の 1°) によって，この系 2 が得られる．

この系 2 により，ほとんどいたる所一致する二つの函数は，積分を考えるときには区別する必要がないわけである．

定理 12. 4. f が E で積分可能ならば，$E(f\neq 0)$ は μ 測度有限な集合の高々可算

無限個の和として表わされる.

証明. 仮定により $\int_E |f| d\mu < \infty$ である. $E_n = E\left(|f| > \frac{1}{n}\right)$ ($n=1, 2, \cdots$) とおくと, 積分の定義から容易にわかるように

$$\frac{1}{n}\mu(E_n) \leqq \int_E |f| d\mu < \infty.$$

だから, $\mu(E_n) < \infty$. そして $E(f \neq 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ だから, この定理が成立する.

定理 12. 5 (**積分法の第一平均値定理**). 集合 E の上で $f(x)$ が有界, $g(x)$ が積分可能であるとする. このとき

$$m = \inf_{x \in E} f(x), \qquad M = \sup_{x \in E} f(x)$$

とおくと,

1°) $f(x)g(x)$ は E で積分可能であって,

2°) $$m \leqq c \leqq M, \quad \int_E f(x)|g(x)| d\mu(x) = c \int_E |g(x)| d\mu(x)$$

となる実数 c が存在する.

証明. 仮定により

$$|f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leqq (|m| + |M|)|g(x)|$$

であって, この右辺は積分可能であるから, $f(x)g(x)$, $f(x)|g(x)|$ は積分可能である. そしてまた

$$m|g(x)| \leqq f(x)|g(x)| \leqq M|g(x)|$$

であるから

$$m\int_E |g(x)| d\mu(x) \leqq \int_E f(x)|g(x)| d\mu(x) \leqq M\int_E |g(x)| d\mu(x).$$

だから

$$\int_E |g(x)| d\mu(x) \neq 0 \text{ のときは } c = \frac{\int_E f(x)|g(x)| d\mu(x)}{\int_F |g(x)| d\mu(x)},$$

$$\int_E |g(x)| d\mu(x) = 0 \text{ のときは } c \text{ は } m \leqq c \leqq M \text{ なる任意の一つの実数}$$

とすればよい.

系. R^N の中の有界な閉区間 E において, $f(x)$ が連続, $g(x)$ が Lebesgue 積分可能で $\geqq 0$ ならば,

$$\int_E f(x)g(x)dx=f(x_0)\int_E g(x)dx$$

となる $x_0\in E$ が存在する．特に E が1次元の区間ならば x_0 は E の内点にとれる．(これが Riemann 積分における第一平均値定理*)である．)

証明.**) $f(x)$ は有界な閉区間で連続だから，有界であって，その最大値 M と最小値 m とを実際にとる点が存在する．従って，上の定理の 2°) のような c に対して，$f(x_0)=c$ となるような $x_0\in E$ が (E が1次元の区間なら E の内点の中に) 存在する．よってこの系が成立する．

注意 2. 上の諸定理の中で定理 12. 2 の 2°)，定理 12. 5 およびその系を除き，その他は $f(x)$ を複素数値函数としても成立する．

注意 3. 定理 12. 5 において f, g ともに有界でないときは，それぞれが積分可能であっても，積 fg は積分可能とは限らない．例えば $E=(0, 1]\subset R^1$, $f(x)=g(x)=x^{-1/2}$ とすると，(問1により) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 g(x)dx=2$, $\int_0^1 f(x)g(x)dx=\infty$.

Euclid 空間 R^N における Lebesgue 測度による積分については，§7 に述べた性質によって，次の各定理が成立する．

定理 12. 6. $f(x)$ が集合 $E\subset R^N$ の上で Lebesgue 積分可能な函数ならば，任意の $\varepsilon>0$ に対して，或る有界集合の外では恒等的に0になるような R^N の上の連続函数 $f_\varepsilon(x)$ で

$$\left|\int_E f(x)dx-\int_E f_\varepsilon(x)dx\right|\leqq\int_E|f(x)-f_\varepsilon(x)|dx<\varepsilon \tag{12. 15}$$

となるものが存在する (dx は Lebesgue 測度による積分を表わす).

証明. はじめの不等式は定理12. 1からわかるから，あとの不等式を証明すればよい．また積分の定義により，$f\geqq 0$ の場合を証明すれば十分であるから，そのように仮定して証明する．R^N の原点 O から点 x までの距離を $|x|$ で表わすことにし，

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{k-1}{2^n}, & x\in E\left(\dfrac{k-1}{2^n}\leqq f<\dfrac{k}{2^n},\ \ |x|<n\right),\ \ 1\leqq k\leqq 2^n n\\ 0, & x\in E(f\geqq n)\cup E(|x|\geqq n)\end{cases}$$

---

*) 例えば，三村征雄編，大学演習微分積分学（裳華房），III，§1 の 2 (86頁) および問題11 (98頁) に，1次元の場合が述べられている．

**) この証明中に使う連続函数の諸性質については，例えば，上述の書の I，§3 の 4 (98頁) および同書付録の 5 (369—370頁) を参照．そこでは1次元の場合が述べられているが，N 次元への拡張は容易である．

とすると，*) $\{f_n(x)\}$ は E の上の単函数の単調増加列で，$\lim f_n(x)=f(x)$ (a. e.) だから，積分の定義により $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n dx=\int_E f dx$. ところが E の上で $f_n(x)\leqq f(x)$ だから

$$\lim_{n\to\infty}\int_E|f-f_n|dx=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_E f dx-\int_E f_n dx\right\}=0.$$

だから適当な n をとれば

$$\int_E|f-f_n|dx<\frac{\varepsilon}{2}; \tag{12. 16}$$

この n を固定し，$S_n=\{x;\ |x|<n\}$ とおく．このとき f_n は

$$f_n=\sum_{j=1}^m \alpha_j\chi_{E_j}\quad(\alpha_j>0)$$

なる形に表わされ，$E_j\subset S_n$ $(j=1,\cdots,m)$ である．ここで各 E_j に対して定理 7. 4 と 7. 5 とにより

$$F_j\subset E_j\subset G_j\subset S_n,\quad \mu(G_j-F_j)<\frac{\varepsilon}{2m\alpha_j}\quad(\mu \text{ は Lebesgue 測度})$$

となる閉集合 F_j と開集合 G_j とが存在し，またそれらに対して，R^N の上で $0\leqq g_j(x)\leqq 1$ なる連続函数 $g_j(x)$ で

$$g_j(x)=\begin{cases}1 & (x\in F_j)\\ 0 & (x\in G_j{}^c)\end{cases}$$

なるものが存在する（付録 §3, 例 1)．このとき，$x\notin(G_j-F_j)$ ならば $\chi_{E_j}=g_j$ だから

$$\int_E|\chi_{E_j}-g_j|dx\leqq\mu(G_j-F_j)<\frac{\varepsilon}{2m\alpha_j}.$$

よって，$f_\varepsilon=\sum_{j=1}^m\alpha_j g_j$ と定義すると，f_ε は R^N で連続で，$x\notin S_n$ なら $f_\varepsilon(x)=0$ であり

$$\int_E|f_n-f_\varepsilon|dx\leqq\sum_{j=1}^m\alpha_j\int_E|\chi_{E_j}-g_j|dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

この式と (12. 16) とから (12. 15) を得る．

定理 12. 7 (**Lebesgue 積分の不変性**). $f(x)$ が R^N の上の Lebesgue 可測函数で，定積分 $\int_{R^N}f(x)dx$ を持つならば，任意の $y\in R^N$ に対して $f(x+y)$ も，また $f(-x)$ も x の函数として Lebesgue 可測で定積分を持ち，

$$\int_{R^N}f(x+y)dx=\int_{R^N}f(-x)dx=\int_{R^N}f(x)dx.$$

---

*) 定理 10. 1 の証明と比較せよ；f_n が $E(f\geqq n)\cup E(|x|\geqq n)$ で 0 になるようにした点だけ異るが，$\mu(E(\lim f_n\neq f))=\mu(E(f=\infty))=0$ である．

この定理の証明は，Lebesgue 測度の不変性（定理 7. 1）と積分の定義とから容易にできるから，読者の演習問題とする——巻末の解答参照.

問 3. 上の定理 12. 7 を証明せよ.

定理 12. 8. $f(x)$ が R^N で Lebesgue 積分可能な函数ならば

(12. 17)
$$\lim_{|y|\to 0}\int_{R^N}|f(x+y)-f(x)|dx=0.$$

証明. 任意の $\varepsilon>0$ に対して，上の二つの定理により，或る有界集合の外で恒等的に 0 になる連続函数 $f_\varepsilon(x)$ で，任意の $y\in R^N$ に対して

(12. 18)
$$\int_{R^N}|f(x+y)-f_\varepsilon(x+y)|dx=\int_{R^N}|f(x)-f_\varepsilon(x)|dx<\varepsilon$$

となるものが存在する. $S_n=\{x;\ |x|<n\}$ とするとき，f_ε に関係して n を十分大きくとり，$|y|<1$ なるかぎり

(12. 19)
$$\{x;\ f_\varepsilon(x+y)\neq 0\}\subset S_n$$

となるようにできる. $f_\varepsilon(x)$ は有界閉集合 $\bar{S}_n$ で連続，従って一様連続だから

$$\lim_{|y|\to 0}\{\sup_{x\in S_n}|f_\varepsilon(x+y)-f_\varepsilon(x)|\}=0.$$

だから

(12. 20)
$$\lim_{|y|\to 0}\int_{S_n}|f_\varepsilon(x+y)-f_\varepsilon(x)|dx$$
$$\leqq \lim_{|y|\to 0}\{\sup_{x\in S_n}|f_\varepsilon(x+y)-f_\varepsilon(x)|\}\mu(S_n)=0.$$

ところが (12. 18), (12. 19) により

$$\int_{R^N}|f(x+y)-f(x)|dx$$
$$\leqq\int_{R^N}|f(x+y)-f_\varepsilon(x+y)|dx+\int_{R^N}|f_\varepsilon(x+y)-f_\varepsilon(x)|dx+\int_{R^N}|f_\varepsilon(x)-f(x)|dx$$
$$<\varepsilon+\int_{S_n}|f_\varepsilon(x+y)-f_\varepsilon(x)|dx+\varepsilon.$$

この両辺の $\overline{\lim}_{|y|\to 0}$ をとれば，(12. 20) により

$$\overline{\lim_{|y|\to 0}}\int_{R^N}|f(x+y)-f(x)|dx\leqq 2\varepsilon;$$

ε は任意の正数で上の式の左辺は ε に無関係だから (12. 17) が成立する. （証明終）

問 4. 測度空間 $(X,\ \mathfrak{B},\ \mu)$ があって $E\in\mathfrak{B}$, $\mu(E)<\infty$ とし，$f(x)$ が E の上の可測函数で $0\leqq f(x)\leqq M<\infty$ とする. 区間 $(0,\ M]$ の分割

(Δ)　　$$0=\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{n-1}<\alpha_n=M$$

に対して

$$E_j=E(f\geqq\alpha_j)\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

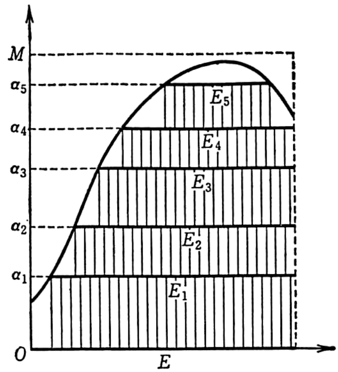
とし，

$$S_\Delta=\sum_{j=1}^{n-1}(\alpha_j-\alpha_{j-1})\mu(E_j)$$

とおくと，

$$\sup_\Delta S_\Delta=\int_E f d\mu;$$

ただし，左辺の sup はすべての分割のしかたに対する上限を意味し，右辺は本文中で定義した積分である．



問 5. E を R^N の中の Lebesgue 可測集合，f を E の上で $f(x)\geqq 0$ なる Lebesgue 可測函数とする．このとき

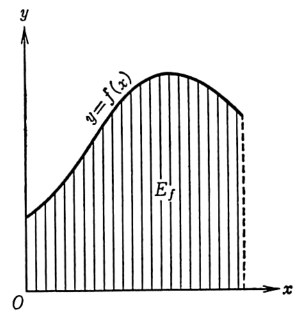
i) R^{N+1} の中の集合

$$E_f=\{(x,\ y);\ x\in E,\ 0\leqq y<f(x)\}$$

は Lebesgue 可測である；

ii) R^N, R^{N+1} における Lebesgue 測度をそれぞれ μ_N, μ_{N+1} と書くとき

$$\mu_{N+1}(E_f)=\int_E f d\mu_N.$$



注意 4. 問4または問5の方法で，積分を定義することもできる．問5の事実は，R^1 または R^2 の上の函数の Riemann 積分を，それぞれ R^2 における面積または R^3 における体積の概念を使って定義することに相当する．

問 6. 測度空間 $(X,\ \mathfrak{B},\ \mu)$ があって，$f(x)$ を集合 $E\in\mathfrak{B}$ の上で可積分な複素数値函数とし，任意の集合 $A\subset E$ $(A\in\mathfrak{B})$ に対して $\Phi(A)=\int_A f(x)d\mu(x)$ とおく．E の任意の分割 $E=E_1+\cdots+E_n$ $(E_j\in\mathfrak{B})$ に対して $\sum_{j=1}^{n}|\Phi(E_j)|$ を考えると，

$$\sup\sum_{j=1}^{n}|\Phi(E_j)|=\int_E|f(x)|d\mu(x)\quad\left(\begin{array}{l}\text{左辺の sup は } E \text{ のあらゆる}\\ \text{分割のしかたに対する上限}\end{array}\right).$$

§13. 項別積分に関する諸定理

Lebesgue 式積分の効用の一つは，函数列あるいは函数項の級数において，極限あるいは無限和をとる操作と積分演算との順をとりかえることができるための条件が，Riemann 積分の場合よりずっと簡単になることである．微分演算も極限をとる操作の一種であるか

ら，微分演算と積分演算との順序をかえられる判定条件も簡単になる．これらのことに関する諸定理を，この § と次の § とで述べる．

この § でも測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ を固定し，出てくる集合はすべて $\mathfrak{B}$ に属し，函数はすべて $\mathfrak{B}$-可測なものとする．

補助定理 1. 集合 E の上で $f(x)\geqq 0$，また $g_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ は単函数 $\geqq 0$ であって，E の各点 x で

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \tag{13. 1}$$

ならば，

$$\int_E f\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E g_n\,d\mu. \tag{13. 2}$$

証明．$h_N=g_1+g_2+\cdots+g_N$ とおくと，前の § の補助定理 1 により

$$\int_E h_N\,d\mu=\sum_{n=1}^{N}\int_E g_n\,d\mu.$$

また $\{h_N\}$ は単函数の単調増加列で $\lim_{N\to\infty} h_N(x)=f(x)$ だから，前の § に述べた積分の定義により

$$\int_E f\,d\mu=\lim_{N\to\infty}\int_E h_N\,d\mu=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_E g_n\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E g_n\,d\mu.$$

補助定理 2. 集合 E の上で $f(x)\geqq 0$ ならば，上の (13. 1)，(13. 2) が成立するような単函数 $g_n(x)\geqq 0$ $(n=1, 2, \cdots)$ が存在する．

証明．積分の定義により，単函数 $h_n(x)\geqq 0$ の単調増加列で

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x)=f(x), \qquad \lim_{n\to\infty}\int_E h_n\,d\mu=\int_E f\,d\mu$$

なるものが存在するから，$g_1=h_1$，$g_n=h_n-h_{n-1}$ $(n\geqq 2)$ とすればよい．

定理 13. 1. E の上で $f_n(x)\geqq 0$ $(n=1, 2, \cdots)$，$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$*) ならば

$$\int_E f\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n\,d\mu. \tag{13. 3}$$

証明．各 $f_n(x)$ に対して，補助定理 2 により，単函数 $g_{nm}(x)\geqq 0$ $(m=1, 2, \cdots)$ が

---

*) f_n がすべて $\mathfrak{B}$-可測ならば，$f=\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ も自動的に $\mathfrak{B}$-可測になる（定理 10. 4 と 10. 6 により）．今後このように，高々可算個の可測函数から和や極限操作などで他の函数を構成して，それが自動的に可測になる場合には，一々そのことをことわらないで，可測函数として扱う．

存在して

$$f_n(x)=\sum_{m=1}^{\infty} g_{nm}(x), \quad \int_E f_n d\mu=\sum_{m=1}^{\infty}\int_E g_{nm} d\mu.$$

$\{g_{nm};\ n,\ m=1, 2, \cdots\}$ を一列に並べかえたもの（9 頁）を，あらためて $\{g_1, g_2, \cdots\}$ とすると $f(x)=\sum_{N=1}^{\infty} g_N(x)$ である．だから，補助定理 1 と，各 N に対して $\int_E g_N d\mu \geqq 0$ なることとにより

$$\int_E f d\mu=\sum_{N=1}^{\infty}\int_E g_N d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_E g_{nm} d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n d\mu.$$

定理 13. 2. E の上で $0\leqq f_1\leqq f_2\leqq\cdots\leqq f_n\leqq\cdots$, $\lim_{n\to\infty} f_n=f$ ならば

$$\int_E f d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu. \tag{13. 4}$$

証明. $\mu(E(f_n=\infty))>0$ なる n が存在する場合には，集合 $E(f_n=\infty)$ の上では $f=\infty$ だから，(13. 4) は両辺ともに ∞ となり定理は成立する．だからすべての n に対して $\mu(E(f_n=\infty))=0$ とすると，$E_0=\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n=\infty)$ も零集合であって E_0 の上での任意の函数の積分は 0 である（定理 12. 2 の 1°））から，はじめから E の各点で f_n は有限な値をとるとして証明すればよい．よって

$$g_1=f_1, \quad g_n=f_n-f_{n-1} \quad (n=2, 3, \cdots)$$

とおくと

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n} g_k(x), \ f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x), \ g_k(x)\geqq 0$$

だから，定理 13. 1 と 定理 12. 3 により

$$\int_E f d\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E g_k d\mu=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_E g_k d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu.$$

系. 上の定理の仮定 $f_1\geqq 0$ を $\int_E f_1 d\mu>-\infty$ でおきかえてもよい．

仮定により $f_1>-\infty$ (a. e.) だから証明は上の定理とまったく同じである．

定理 13. 3. f が E の上で定積分をもつとする．（積分は有限でなくてもよい．）このとき，$E=\sum_{n=1}^{\infty} E_n$（直和）ならば

$$\int_E f d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f d\mu. \tag{13. 5}$$

証明. 前の § で述べたように $f=f^+-f^-$ と分けて考えてよいから，$f\geqq 0$ の場合だけ証明すればよい．このとき

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x) & (x\in E_n) \\ 0 & (x\in E-E_n) \end{cases} \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

なる f_n も $\mathfrak{B}$-可測函数で，$f_n\geqq 0$，$\sum_{n=1}^{\infty}f_n=f$ だから，定理 13. 1 によって

$$\int_E f\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f\,d\mu.$$

系．f が E の上で定積分をもつとき，E の部分集合の単調増加列 $\{E_n\}$ があって $\mu(E-\lim_{n\to\infty}E_n)=0$ ならば

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f\,d\mu=\int_E f\,d\mu.$$

証明．$E_0=E-\lim_{n\to\infty}E_n$ とおくと，定理 12. 2 の 1°）により $\int_{E_0}f\,d\mu=0$ だから，$E=E_0+E_1+\sum_{n=2}^{\infty}(E_n-E_{n-1})$ と考えて，上の定理と定理 12. 3 の 2°）を使えばよい．

定理 13. 4. f が X の上で積分可能ならば，任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta=\delta_\varepsilon>0$ が存在して，集合 $E\subset X$ が $\mu(E)<\delta$ ならば $\left|\int_E f\,d\mu\right|<\varepsilon$ となる．

（函数 f を定めると，$\delta=\delta_\varepsilon$ は ε だけに関係し E については一様にとれる；すなわち $E\subset X$，$\mu(E)<\delta$ なるかぎり，E はどのような $\mathfrak{B}$-可測集合であっても $\left|\int_E f\,d\mu\right|<\varepsilon$ となるのである．）

証明．$X_n=X(|f|<n)$ $(n=1, 2, \cdots)$ とおくと $\{X_n\}$ は n について単調増加で $\mu(X-\lim_{n\to\infty}X_n)=\mu(X(|f|=\infty))=0$（定理 12. 2）．だから上の定理の系により

$$\lim_{n\to\infty}\int_{X-X_n}|f|\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_X|f|\,d\mu-\int_{X_n}|f|\,d\mu\right\}=0.$$

だから，$\varepsilon>0$ に対して

$$\int_{X-X_n}|f|\,d\mu<\frac{\varepsilon}{2}$$

となるような n をとり $\delta=\varepsilon/2n$ とすると，$\mu(E)<\delta$ ならば

$$\left|\int_{E\cap X_n}f\,d\mu\right|\leqq n\cdot\delta<\frac{\varepsilon}{2}$$

となり，一方

$$\left|\int_{E-X_n}f\,d\mu\right|\leqq\int_{E-X_n}|f|\,d\mu\leqq\int_{X-X_n}|f|\,d\mu<\frac{\varepsilon}{2}$$

だから

$$\left|\int_E f\,d\mu\right|\leqq\left|\int_{E\cap X_n}f\,d\mu\right|+\left|\int_{E-X_n}f\,d\mu\right|<\varepsilon.$$

（証明終）

函数 $f(x)$ が X の上で定積分をもてば，任意の $E\subset X$ に対して $f(x)$ は E の上で定積分をもつことは，定義から明らかである．このとき

$$\Phi(E)=\int_E f d\mu$$

とおくと，$\Phi(E)$ は $\mathfrak{B}$-集合函数（§3）である．この $\Phi(E)$ を函数 $f(x)$ の**不定積分**という．定理 13. 3 により，不定積分は測度と同じく完全加法性をもつ．（負の値もとり得る点は測度と異なる．）また定理 13. 4 により，$\mu(E)\to 0$ ならば E について一様に $\Phi(E)\to 0$ となる．この性質を不定積分の**絶対連続性**という．なお，一般の集合函数とその絶対連続性については，次の第 IV 章で述べる．

再び項別積分に関する話にもどる．

定理 13. 5 （**Fatou**（ファトゥー）**の補助定理**）．E の上で $f_n\geqq 0$ ならば

(13. 6) $$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leqq \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu.$$

証明．$g_n(x)=\inf_{k\geqq n} f_k(x)$ とおくと，$g_n\geqq 0$ であり，函数列 $\{g_n\}$ は単調増加で E の各点で $\lim_{n\to\infty} g_n(x)=\varliminf_{n\to\infty} f_n(x)$ となる．だから定理 13. 2 により

(13. 7) $$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E g_n d\mu.$$

ところが，各 n に対して $g_n\leqq f_n$ だから

$$\int_E g_n d\mu\leqq\int_E f_n d\mu;$$

この両辺の下極限をとれば，左辺は極限値が存在するから

(13. 8) $$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n d\mu\leqq\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu.$$

(13. 7) と (13. 8) とから (13. 6) を得る．

定理 13. 6 （**Lebesgue の収束定理，Lebesgue の項別積分定理**）．函数 $f_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ は E で $\mathfrak{B}$-可測，また E の上で積分可能な函数 $\varphi(x)\geqq 0$ が存在して，E の各点で

(13. 9) $$|f_n(x)|\leqq\varphi(x)\quad(n=1, 2, \cdots)$$

とする．このとき（$|f_n|$, $|\varliminf f_n|$, $|\varlimsup f_n|$ はすべて φ より大きくないから積分可能であって）

1°) $$\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu\geqq\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n d\mu,$$

2°)
$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu \leqq \int_E \varlimsup_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

従って $f=\lim_{n\to\infty} f_n$ が存在すれば

3°)
$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

証明. $\varliminf_{n\to\infty} f_n = g$, $\varlimsup_{n\to\infty} f_n = h$ とおく. $|f_n| \leqq \varphi$ なる仮定により

$$\varphi + f_n \geqq 0, \qquad \varphi - f_n \geqq 0.$$

だから定理 13. 5 により ($\varliminf_{n\to\infty}(-f_n) = -\varlimsup_{n\to\infty} f_n = -h$ なることを使って)

$$\begin{cases} \varliminf_{n\to\infty}\int_E (\varphi+f_n)\,d\mu \geqq \int_E (\varphi+g)\,d\mu, \\ \varliminf_{n\to\infty}\int_E (\varphi-f_n)\,d\mu \geqq \int_E (\varphi-h)\,d\mu; \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} \int_E \varphi d\mu + \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu \geqq \int_E \varphi d\mu + \int_E g d\mu, \\ \int_E \varphi d\mu - \varlimsup_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu \geqq \int_E \varphi d\mu - \int_E h d\mu. \end{cases}$$

この二つの式から，それぞれ 1°), 2°) が得られる. 3°) は 1°), 2°) から明らかである.

系 1. E の上で

$$f_1(x) \geqq f_2(x) \geqq \cdots \geqq f_n(x) \geqq \cdots \geqq 0, \qquad \int_E f_1 d\mu < \infty$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

証明. 上の定理において $\varphi = f_1$ とすればよい.

系 2 (**有界収束の定理**). $\mu(E) < \infty$ なる集合 E の上の $\mathfrak{B}$-可測函数列 $\{f_n\}$ が一様有界，すなわち定数 $M>0$ が存在して E の上で $|f_n(x)| \leqq M$ $(n=1, 2, \cdots)$ となり，$f=\lim_{n\to\infty} f_n$ が存在するならば，f_n も f も E で積分可能であって

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

証明. $\varphi(x) \equiv M$ とおくと，$\mu(E) < \infty$ なることにより φ は E で積分可能である. だから上の定理 13. 6 からただちにこの系 2 が得られる.

系 3. $\mu(E)<\infty$ なる集合 E の上で f_n $(n=1, 2, \cdots)$ が積分可能であって，E の上で一様に $\lim_{n\to\infty} f_n=f$ となるならば，f も E で積分可能であって

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu=\int_E f d\mu.$$

(この系の‘積分可能’を‘Riemann 積分可能’の意味にとれば，Riemann 積分でもよく知られた定理になる.)

証明. $\{f_n\}$ が f に E で一様に収束するから，或る N が存在して，$n\geqq N$ ならばすべての $x\in E$ に対して $|f_n(x)-f_N(x)|<1$，従って

$$|f_n(x)|\leqq|f_N(x)|+1$$

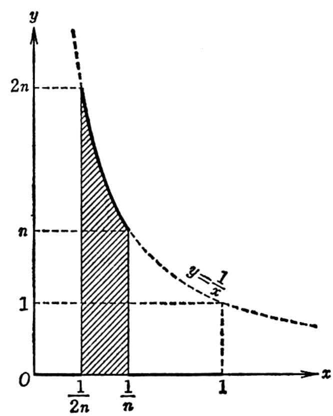
となる. よって $\varphi(x)=|f_N(x)|+1$ とおいて，$\{f_n(x);\ n\geqq N\}$ に上の定理 13.6 を適用すればよい.

注意 1. 定理 13.6 で，(13.9) のような可積分な $\varphi(x)$ が存在するという仮定を除くことはできない. 例えば，$E=(0, 1]\subset R^1$ において

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \left(\dfrac{1}{2n}\leqq x\leqq\dfrac{1}{n}\text{ のとき}\right)\\ 0 & (\text{その他の } x \text{ において})\end{cases}$$

とすると，$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\equiv 0$ であって

$$\int_E f_n dx=\log 2,\quad \int_E f dx=0.$$



しかし，$|g_n|\leqq\varphi$，$\int_E \varphi d\mu<\infty$ なる φ がなくても，$\lim_{n\to\infty}\int g_n d\mu=\int\lim_{n\to\infty} g_n d\mu$ となることもある. 例えば，上と同じ E において

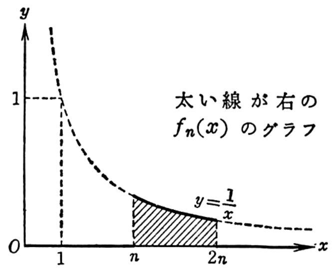
$$g_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \left(\dfrac{1}{n+1}\leqq x\leqq\dfrac{1}{n}\text{ のとき}\right)\\ 0 & (\text{その他の } x \text{ において})\end{cases}$$

とすると，E の上で $|g_n|\leqq\varphi$ なる函数 φ はすべて $\varphi(x)\geqq\dfrac{1}{x}$ だから $\int_E\varphi dx=\infty$ であるが，$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=g(x)\equiv 0$ であって

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n dx=\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=0=\int_E g dx.$$

また $\mu(E)=\infty$ のときは，$|f_n|\leqq M$ であって f_n も f もすべて積分可能と仮定して

も，系2，系3は成立しない．例えば $E=(0,\ \infty)\subset R^1$ において



$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (n\leqq x\leqq 2n\ のとき)\\ 0 & (その他の\ x\ において)\end{cases}$$

とすると，$|f_n(x)|\leqq 1$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$ (E で一様収束）であるが $\int_E f_n dx=\log 2$.

注意 2. 定理 13. 6 の 3°）および系2，系3は f_n, f が複素数値でも成立する．

注意 3. 定理 13. 6 および系 1, 2, 3 において，添字 n（自然数）のかわりに連続的に変化する実数 t を助変数とした場合も，まったく同様である．例えば定理 13. 6 の 3°）は次のようになる．

定理 13. 6′. $f_t(x)$ $(t>t_0)$ が E で $\mathfrak{B}$-可測であり，E で積分可能な函数 $\varphi(x)\geqq 0$ が存在して，すべての $t>t_0$ に対して E の上で $|f_t(x)|\leqq\varphi(x)$ であって，$\lim_{t\downarrow t_0} f_t(x)=f(x)$*) ならば

$$\lim_{t\downarrow t_0}\int_E f_t d\mu=\int_E f d\mu.$$

これを証明するには，$t_n\downarrow t_0$ なる任意の数列 $\{t_n\}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_{t_n} d\mu=\int_E f d\mu$$

となることを示せばよいから，上の定理 13. 6 に帰着される．

次の定理も上の定理 13. 6 と同じぐらい有用である．

定理 13. 7. $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ が E の上の $\mathfrak{B}$-可測函数で

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_E |f_n| d\mu<\infty$$

ならば，ほとんどすべての $x\in E$ において有限な $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が存在して

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n d\mu=\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu.$$

証明. 定理 13. 1 と仮定によって

---

*) '$t\downarrow t_0$' とは，t が t_0 より大きい所から単調に減少して t_0 に近づくことである．次の '$t_n\downarrow t_0$' も同様である．

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu < \infty.$$

だから定理 12. 2 の 2°）により，ほとんどすべての $x \in E$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$,
従って有限な $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が存在する．よって

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \qquad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

とおくと

$$|g_n(x)| \leqq \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \leqq \varphi(x) \ (n=1, 2, \cdots), \quad \int_E \varphi d\mu < \infty.$$

だから定理 13. 6 により

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_E f_k d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu.$$

問 1. 集合 E の上で $|f_n(x)| \leqq \varphi(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ であって $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在し，或る正数 $p \geqq 1$ に対して $\int_E \varphi(x)^p d\mu(x) < \infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|^p d\mu = 0$.

問 2. $t>0$ と $x=(x_1, \cdots, x_N) \in R^N$ に対して $K(t, x) = (4\pi t)^{-N/2} \exp(-\|x\|^2/4t)$, ただし $\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_N^2)^{1/2}$, とする．$f(x)$ が R^N の上の有界連続函数ならば

$$\lim_{t\downarrow 0} \int_{R^N} K(t, x-y) f(y) dy = f(x) \qquad (すべての\ x \in R^N\ で).$$

（被積分函数が連続だから，まず Riemann 積分と考えて変数変換 $z=(x-y)/2\sqrt{t}$ をおこなう．収束の証明も Riemann 積分の考えだけでもできるが，この § の定理を使うと簡単である．）

問 3. $f(x)$ が $-\infty < x < \infty$ で Lebesgue 積分可能ならば，函数 $\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x) dx$ は $-\infty < \lambda < \infty$ で連続である．

§14. 積分記号のもとでの微分法

Riemann 積分において，積分記号の中へ微分演算を入れることに関する定理は，積分区間が無限の場合は，普通次の形で述べられる：（この定理は，次の定理 14. 2 との比較のために述べておくだけで，本書を読まれるのにはまったく必要でないから，証明は省略する.*)）

定理 14. 1. 函数 $f(x, \alpha)$ とその偏導函数 $f_\alpha(x, \alpha)$ とが $c \leqq x < \infty$, $a < \alpha < b$ に

*) 証明は例えば渡辺孫一郎著，初等解析学（裳華房），127 頁，または高木貞治著，解析概論（岩波），改訂第三版，166―167 頁.

おいて連続であって，広義積分 $\int_c^\infty f(x,\ \alpha)dx$ が各 α に対して収束し，また広義積分 $\int_c^\infty f_\alpha(x,\ \alpha)dx$ が α について一様に収束すれば，$\int_c^\infty f(x,\ \alpha)dx$ は α について微分可能であって

$$\frac{d}{d\alpha}\int_c^\infty f(x,\ \alpha)dx=\int_c^\infty f_\alpha(x,\ \alpha)dx. \tag{14. 1}$$

（積分区間が有限でも，広義積分の場合は定理の形は同じである.）

これに相当する Lebesgue 積分における定理は次のように述べられる：

定理 14. 2. 測度空間 $(X,\ \mathfrak{B},\ \mu)$ があり，函数 $f(x,\ \alpha)$ $(x\in X,\ a<\alpha<b)$ は x の函数としては X の上で可積分，α の函数としては微分可能とし，また X の上で積分可能な函数 $\varphi(x)$ が存在して $X\times(a,\ b)$ の上で $|f_\alpha(x,\ \alpha)|\leqq\varphi(x)$ であるとすると，積分 $\int_X f(x,\ \alpha)d\mu(x)$ は α の函数として微分可能であって

$$\frac{d}{d\alpha}\int_X f(x,\ \alpha)d\mu(x)=\int_X f_\alpha(x,\ \alpha)d\mu(x). \tag{14. 2}$$

注意. 定理2は定理1を含むわけではない.（例えば $x\geqq0,\ 0<\alpha<1$ において $f(x,\alpha)=\frac{\alpha}{x}\sin x\ (x\neq0),\ =\alpha\ (x=0)$ とすると，$\varphi(x)\geqq|f_\alpha(x,\ \alpha)|\equiv\left|\frac{\sin x}{x}\right|\ (x\neq0)$ なる函数 $\varphi(x)$ は $x>0$ で積分可能ではないが，定理 14. 1 の仮定はすべて満たされる.）しかし応用上は，定理 14. 1 が適用されるような問題における函数は実は定理 14. 2 の仮定が満たされている場合が多く，定理 14. 1 のいくつかの仮定をためすよりも簡単である.

定理 14. 2 の証明. まず任意の $\alpha_0\in(a,\ b)$ に対して，仮定により

$$\lim_{\delta\to0}\frac{f(x,\ \alpha_0+\delta)-f(x,\ \alpha_0)}{\delta}=f_\alpha(x,\ \alpha_0) \tag{14. 3}$$

だから，$f_\alpha(x,\ \alpha_0)$ は x の（$\mathfrak{B}$-可測函数の極限函数として）$\mathfrak{B}$-可測函数である．また微分法の平均値定理により，適当な $\delta_0>0$ をとれば $0<|\delta|<\delta_0$ なるかぎり

$$\frac{f(x,\ \alpha_0+\delta)-f(x,\ \alpha_0)}{\delta}=f_\alpha(x,\ \alpha_0+\theta\delta),$$

ここで θ は $x,\ \alpha_0,\ \delta$ に関係するが，とにかく $0<\theta<1$ である．だから仮定により

$$\left|\frac{f(x,\ \alpha_0+\delta)-f(x,\ \alpha_0)}{\delta}\right|\leqq\varphi(x). \tag{14. 4}$$

(14. 3) と (14. 4) により定理 13. 6′ が適用されて

$$\lim_{\delta\to0}\int_X\frac{f(x,\ \alpha_0+\delta)-f(x,\ \alpha_0)}{\delta}d\mu(x)=\int_X f_\alpha(x,\ \alpha_0)d\mu(x).$$

ここで α_0 は $(a,\ b)$ の中で任意だから，$\dfrac{d}{d\alpha}\displaystyle\int_X f(x,\ \alpha)d\mu(x)$ が存在して (14. 2) が成立する．

例. 公式 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *) において，x を $\sqrt{\alpha}\,x$ $(\alpha>0)$ に変換して

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \tag{14. 5}$$

a を 1 より小さい正の定数とすると，(14. 5) の左辺の被積分函数を α で n 回偏微分したものについて，$a<\alpha<\infty$ において

$$|e^{-\alpha x^2}(-x^2)^n|\leqq e^{-ax^2}x^{2n},\qquad \int_0^\infty e^{-ax^2}x^{2n}dx<\infty$$

が成立するから，$n=1,2,\cdots$ として定理 14. 2 を逐次適用できる．だから (14. 5) の左辺は α で何回でも微分できて

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}(-x^2)^n dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}\,\alpha^{-\frac{1}{2}-n};$$

すなわち，a は任意に小さくとれるから，任意の $\alpha>0$ に対して

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^{2n}dx=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-\frac{1}{2}-n}. \tag{14. 6}$$

特に $\alpha=1$ とおけば

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n}dx=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}. \tag{14. 7}$$

これはよく知られた公式である．(左辺の x^{2n} のかわりに x^{2n+1} とした場合は右辺が $n!/2$ となることも周知であろう――部分積分を n 回くりかえせばよい.)

問 1. $s>0$ の函数 $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ (ガンマ函数) の n 階導函数は

$$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}(\log\ x)^n dx\qquad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

問 2. $K(t,\ x)$ を前 § の問 2 のとおりとする．$f(x)$ を R^N で Lebesgue 可測であって積分可能または有界な任意の函数とし，

$$u(t,\ x)=\int_{R^N}K(t,\ x-y)f(y)dy$$

とおくと，$t>0$, $x\in R^N$ において次の各式が成立する：

---

*) 例えば，三村征雄編，大学演習微分積分学 (裳華房)，300 頁例題 5 参照.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u(t,\ x)}{\partial x_j}&=\int_{R^N}\frac{\partial K(t,\ x-y)}{\partial x_j}f(y)dy\\ \frac{\partial^2 u(t,\ x)}{\partial x_j\partial x_k}&=\int_{R^N}\frac{\partial^2 K(t,\ x-y)}{\partial x_j\partial x_k}f(y)dy\end{aligned}\right\}(j,\ k=1,\ \cdots,\ N),$$

$$\frac{\partial u(t,\ x)}{\partial t}=\int_{R^N}\frac{\partial K(t,\ x-y)}{\partial t}f(y)dy=\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_N{}^2}\right]u(t,\ x).$$

問 3. $f(x)$ が $-\infty<x<\infty$ で Lebesgue 可測で $\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)|f(x)|dx<\infty$ ならば,

$$\varphi(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}f(x)dx$$

は $-\infty<\lambda<\infty$ において二回連続微分可能である.

(問2, 問3において $f(x)$ を Riemann 積分可能な函数とすれば, いずれも Riemann 積分の問題として解ける. 前頁の例や問1ももちろん Riemann 積分の問題である. しかしここでは, 定理 14. 2 の条件が便利なことを見ていただきたい.)

問 4. 任意の $t>0$ と任意の $\lambda\in(-\infty,\ \infty)$ に対して $\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-tx^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\lambda^2/4t}$.

ヒント. $e^{i\lambda x}$ を $\sum_{n=0}^{\infty}(i\lambda x)^n/n!$ と x のTaylor 級数に展開すると, 定理 13. 7 によって項別積分ができる; 各項の積分は公式 (14. 7) の形になる. (この問4は, 積分論の演習問題としては §13 に属するものであるが, (14. 7) を使うのでここに入れた. なおこの式の証明は, 項別積分によらないで, 函数論における複素積分を使う方法もある.)

§15. Fubini (フビニ) の定理

Fubini の定理とは, 二重積分において積分の順序を交換することに関する定理である.*) この § の目的は, Fubini の定理を応用上有用ないろいろの形に述べて, それらを証明することである. まず予備概念の説明から始める.**)

空間 X の部分集合の族 $\mathfrak{M}$ があって

(15. 1_1)　$A_n\in\mathfrak{M}$ で $\{A_n\}$ が単調増加ならば $\lim A_n\in\mathfrak{M}$,

(15. 1_2)　$A_n\in\mathfrak{M}$ で $\{A_n\}$ が単調減少ならば $\lim A_n\in\mathfrak{M}$

がともに成立するとき, $\mathfrak{M}$ は**単調族**であるという.

σ-加法族は明らかに単調族である. 逆に

補助定理 1. 集合族 $\mathfrak{M}$ が単調族でかつ有限加法族ならば σ-加法族である.

---

*)　Fubini-Tonelli の定理ともいう.

**)　ここに述べる単調族の概念は, Fubini の定理の証明の中で使うだけで, 定理そのものの記述や定理の応用には (外見上) 必要ではない. しかしこの概念は, 測度論におけるいろいろの議論において重要である.

証明. σ-加法族の定義の中で (6. 3):

$$A_n \in \mathfrak{M}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)\ \text{ならば}\ A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$$

を証明すればよい, $B_n=\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu$ とおくと, $B_n \in \mathfrak{M}$ (有限加法族) であって $\{B_n\}$ は単調増加, しかも $\lim B_n=A$. だから $\mathfrak{M}$ が単調族なることにより $A \in \mathfrak{M}$. (証明終)

空間 X の部分集合の任意の族 $\mathfrak{A}$ に対して, $\mathfrak{A}$ を含む '最小の σ-加法族' の概念を§6 で説明したが, 同様にして $\mathfrak{A}$ を含む<u>最小の単調族</u>を考えることができる. それを一般に $\mathfrak{M}[\mathfrak{A}]$ と書くことにする. このとき

補助定理 2. $\mathfrak{F}$ が有限加法族ならば $\mathfrak{M}[\mathfrak{F}]$ も有限加法族である.

証明. 有限加法族の条件 (4. 1), (4. 2), (4. 3) を示せばよい.

(4. 1)　$\phi \in \mathfrak{M}[\mathfrak{F}]$, は明らかである.

(4. 2)　$A \in \mathfrak{M}[\mathfrak{F}]$ ならば $A^c \in \mathfrak{M}[\mathfrak{F}]$, の証明.*)

$$\mathfrak{M}_1=\{A;\ A^c \in \mathfrak{M}[\mathfrak{F}]\}$$

とおくと, まず $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{F}$ である. なぜならば, $A \in \mathfrak{F}$ ならば, $\mathfrak{F}$ が有限加法族であることにより $A^c \in \mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}[\mathfrak{F}]$ となるからである. 次に $\mathfrak{M}_1$ は単調族である. なぜならば,

$$A_n \in \mathfrak{M}_1,\ \{A_n\}\ \text{が単調増加（または減少）で}\ \lim A_n=A$$

ならば,

$$A_n{}^c \in \mathfrak{M}[\mathfrak{F}],\ \{A_n{}^c\}\ \text{は単調減少（または増加）で}\ \lim A_n{}^c=A^c$$

となるから, $\mathfrak{M}[\mathfrak{F}]$ が単調族なることにより $A^c \in \mathfrak{M}[\mathfrak{F}]$ となり, $A \in \mathfrak{M}_1$ である. よって $\mathfrak{M}_1$ は $\mathfrak{F}$ を含む単調族であるから, $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}[\mathfrak{F}]$ である.**) このことは, $A \in \mathfrak{M}[\mathfrak{F}]$ ならば $A \in \mathfrak{M}_1$ すなわち $A^c \in \mathfrak{M}[\mathfrak{F}]$ を意味している.

(4. 3)　$A,\ B \in \mathfrak{M}[\mathfrak{F}]$ ならば $A \cup B \in \mathfrak{M}[\mathfrak{F}]$, の証明.***)

第一段. まず

$$\mathfrak{M}_1=\{A;\ \text{任意の}\ B \in \mathfrak{F}\ \text{に対して}\ A \cup B \in \mathfrak{M}[\mathfrak{F}]\}$$

とおくと, $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{F}$ である. なぜならば, $A \in \mathfrak{F}$ とすると, $\mathfrak{F}$ が有限加法族であることにより, 任意の $B \in \mathfrak{F}$ に対して $A \cup B \in \mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}[\mathfrak{F}]$ となるからである. 次に $\mathfrak{M}_1$ は単調族である. なぜならば

---

*)　この証明における論法は, 測度論でよく使われる重要な論法であるから, その意味をよく理解していただくため, 証明を少していねいに述べておく.

**)　この論法は定理6. 3の証明中に使った論法と同じ考え方である. 同所の脚注参照. 次の定理 15. 1 の証明でも, この論法が使われる.

***)　すぐ前の (4. 2) の証明における論法を, 二段階に適用したものである.

$$A_n \in \mathfrak{M},\ \{A_n\}\ が単調増加（または減少）で\ \lim A_n = A$$

とすると，任意の $B \in \mathfrak{F}$ に対して

$$A_n \cup B \in \mathfrak{M}[\mathfrak{F}],\ \{A_n \cup B\}\ は単調増加（または減少）で\ \lim\ (A_n \cup B) = A \cup B$$

となるから，$\mathfrak{M}[\mathfrak{F}]$ が単調族なることにより $A \cup B \in \mathfrak{M}[\mathfrak{F}]$ となり，$A \in \mathfrak{M}_1$ である．よって $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}[\mathfrak{F}]$ である．このことは，$\mathfrak{M}_1$ の定義により，

$$A \in \mathfrak{M}[\mathfrak{F}],\ B \in \mathfrak{F}\ ならば\ A \cup B \in \mathfrak{M}[\mathfrak{F}]$$

を意味している．

第二段．次に

$$\mathfrak{M}_2 = \{B;\ 任意の\ A \in \mathfrak{M}[\mathfrak{F}]\ に対して\ A \cup B \in \mathfrak{M}[\mathfrak{F}]\}$$

とおくと，第一段の結果により $\mathfrak{M}_2 \supset \mathfrak{F}$ である．また $\mathfrak{M}_2$ が単調族になることも，第一段と同様にして証明される．だから $\mathfrak{M}_2 \supset \mathfrak{M}[\mathfrak{F}]$ である．このことは，$\mathfrak{M}_2$ の定義によって，(4. 3) を意味している．（証明終）

上の二つの補助定理から

定理 15. 1. $\mathfrak{F}$ が有限加法族，$\mathfrak{M}$ が単調族で $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{F}$ ならば，$\mathfrak{M} \supset \mathfrak{M}[\mathfrak{F}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{F}]$ である．

証明．まず $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{F}$ により $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{M}[\mathfrak{F}]$ である．次に $\mathfrak{M}[\mathfrak{F}]$ は，補助定理 2 により有限加法族であり，しかも単調族だから，補助定理 1 により σ-加法族である．そして $\mathfrak{M}[\mathfrak{F}] \supset \mathfrak{F}$ だから $\mathfrak{M}[\mathfrak{F}] \supset \mathfrak{B}[\mathfrak{F}]$．一方 $\mathfrak{B}[\mathfrak{F}]$ は $\mathfrak{F}$ を含む単調族であるから $\mathfrak{B}[\mathfrak{F}] \supset \mathfrak{M}[\mathfrak{F}]$ となり，$\mathfrak{M}[\mathfrak{F}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{F}]$ が得られた．（証明終）

一般に，或る集合族が σ-加法族であることを直接証明するのは，必ずしも容易でなくても，有限加法族であることの証明は容易なことがある．また或る集合族が単調族であることの証明は，単調増加（または減少）なる性質のために，比較的容易なことが多い．上の定理 15. 1 は，或る集合族 $\mathfrak{B}$ が σ-加法族であることの証明を，$\mathfrak{B}$ またはそれを含む $\mathfrak{M}$ が単調族なることと，$\mathfrak{B}$ よりも狭い範囲の $\mathfrak{F}$ で $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}[\mathfrak{F}]$ となるようなものの有限加法的なこととに帰着させるから，その点で便利である．使い方の一例は次の定理 15. 2 の証明で見られたい．

さて二つの測度空間 $(X,\ \mathfrak{B}_X,\ \mu_1)$，$(Y,\ \mathfrak{B}_Y,\ \mu_2)$ が与えられたとし (9. 7_1)，(9. 7_2) が成立するものとする；すなわち

(15. 2_1) $\quad X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_k \subset \cdots \subset X,\ \ X_k \in \mathfrak{B}_X,\ \ \mu_1(X_k) < \infty,\ \ \lim X_k = X,$

(15. 2_2) $\quad Y_1 \subset Y_2 \subset \cdots \subset Y_k \subset \cdots \subset Y,\ \ Y_k \in \mathfrak{B}_Y,\ \ \mu_2(Y_k) < \infty,\ \ \lim Y_k = Y$

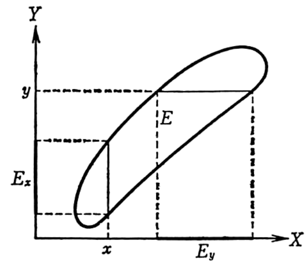
なる集合列 $\{X_k\}$，$\{Y_k\}$ が存在する．このとき §9 で述べたように，直積空間 $Z = X \times Y$

における直積 Borel 集合族 $\mathfrak{B}_Z$ の上に直積測度 μ が定義される. Z の点を z または $\langle x,\ y\rangle$ $(x\in X,\ y\in Y)$ であらわす.

E を Z の中の任意の集合とするとき, X の中の任意の点 x に対して

$$E_x=\{y;\ \langle x,\ y\rangle\in E\}(\subset Y)$$

とする; すなわち E_x は E の x における '切り口' を Y に '投影' したものである (右図参照). 同様に Y の中の任意の点 y に対して



$$E_y=\{x;\ \langle x,\ y\rangle\in E\}(\subset Y)$$

とする. これらの記号を使って以下の諸定理を述べる; それらを総称して Fubini の定理と呼ぶ. 定理をはじめにまとめて述べ, 後に証明を与える.

定理 15. 2 **(Fubini の定理——I).**

1)　$E\in\mathfrak{B}_Z$ ならば

i)　任意の $x\in X$ に対して $E_x\in\mathfrak{B}_Y$, 任意の $y\in Y$ に対して $E_y\in\mathfrak{B}_X$; *)

ii)　$\mu_2(E_x)$ は x の函数として $\mathfrak{B}_X$-可測であり,

$\mu_1(E_y)$ は y の函数として $\mathfrak{B}_Y$-可測である;

iii)　$$\int_X \mu_2(E_x)d\mu_1(x)=\int_Y \mu_1(E_y)d\mu_2(y)=\mu(E),$$

従って $\mu(E)<\infty$ ならば μ_1-a. e. x に対して $\mu_2(E_x)<\infty$, μ_2-a. e. y に対して $\mu_1(E_y)<\infty$ である.

2)　$f(z)\equiv f(x,\ y)$ が $\mathfrak{B}_Z$-可測ですべての z に対して $f(z)\geqq 0$ ならば,

i)　任意の $x\in X$ に対して, $f(x,\ y)$ は y の函数として $\mathfrak{B}_Y$-可測であり,

任意の $y\in Y$ に対して, $f(x,\ y)$ は x の函数として $\mathfrak{B}_X$-可測である;

ii)　$$\int_Y f(x,\ y)d\mu_2(y)$$ は x の $\mathfrak{B}_X$-可測函数であり,

$$\int_X f(x,\ y)d\mu_1(x)$$ は y の $\mathfrak{B}_Y$-可測函数である;

iii)　$$\int_X d\mu_1(x)\int_Y f(x,\ y)d\mu_2(y)=\int_Y d\mu_2(y)\int_X f(x,\ y)d\mu_1(x)=\int_Z f(z)d\mu(z)$$

---

*)　i) によって ii) における $\mu_2(E_x)$, $\mu_1(E_y)$ を考えることができるのであり, また ii) によって iii) の各積分を考えることができるのである. すぐ後の 2), 3) および次の定理 15. 3 においても同じような述べ方をするが, 一々この注意を書かない.

(三つとも ∞ である場合も含む).

3) $f(z)\equiv f(x, y)$ が Z の上の複素数値 $\mathfrak{B}_Z$-可測函数であって，μ について可積分ならば，

i) μ_1-a. e. $x\in X$ に対して $f(x, y)$ は y の函数として Y の上で可積分であり，
μ_2-a. e. $y\in Y$ に対して $f(x, y)$ は x の函数として X の上で可積分である；

ii) $\displaystyle\int_Y f(x, y)d\mu_2(y)$ は x の函数として X の上で可積分であり，

$\displaystyle\int_X f(x, y)d\mu_1(x)$ は y の函数として Y の上で可積分である；

iii) $\displaystyle\int_X d\mu_1(x)\int_Y f(x, y)d\mu_2(y)=\int_Y d\mu_2(y)\int_X f(x, y)d\mu_1(x)=\int_Z f(z)d\mu(z).$

系. $f(z)\equiv f(x, y)$ が Z の上の複素数値 $\mathfrak{B}_Z$-可測函数であって

$$\int_X d\mu_1(x)\int_Y|f(x, y)|d\mu_2(y),\quad \int_Y d\mu_2(y)\int_X|f(x, y)|d\mu_1(x),\quad \int_Z|f(z)|d\mu(z) \tag{15. 3}$$

のうちでどれか一つが有限ならば，他の二つも有限であって三つとも相等しく，しかも上の定理の 3) が成立する.

この系は定理 15. 2 の 2) と 3) とから出る. 3) だけでは $\displaystyle\int_Z|f(z)|d\mu(z)<\infty$ が成立することをためさなければならないが，2) と合せてこの系の形にしておくと，(15. 3) の三つの積分のうちどれか一つだけ（最もためし易いもの）が有限なことをためして見れば 3) の結果がすべて成立するから，応用上便利である. 応用例はこの§の問 4，問 5 について見られたい.

定理 15. 2 の 1) は 2) の特別の場合（$f(z)$ が集合 E の定義函数）であるが，1) の形ででも記憶しておかれた方がよい. 定理の証明（後述）では，まず 1) を証明してからそれを使って 2) を証明する.

次に μ_1, μ_2, μ が完備化されている場合を考える. 応用上はこの場合が多い. この時は定理 15. 2 が次のように修正される. 形式上は‘a. e.（ほとんどすべての）’という言葉が入るだけで，まったく同じ事柄をくり返すことになるが，重要な定理であるから完全な形で書くことにする.*)

$(X, \mathfrak{M}_1, \mu_1)$, $(Y, \mathfrak{M}_2, \mu_2)$ は完備な測度空間で (15. 2_1), (15. 2_2)（ただし $\mathfrak{B}_X$, $\mathfrak{B}_Y$ をそれぞれ $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ とする）が満たされているとし，その直積測度空間を完備化し

*) 定理 15. 3 の 2), iii) から後は，定理 15. 2 の対応する部分と（$\mathfrak{B}_Z$ が $\mathfrak{M}$ になるのを除き）まったく同文である.

たものを $(Z,\ \mathfrak{M},\ \mu)$ とする．このとき

定理 15. 3 (**Fubini の定理——II**).

1) $E\in\mathfrak{M}$ ならば，

i) μ_1-a. e. $x\in X$ に対して $E_x\in\mathfrak{M}_2$，μ_2-a. e. $y\in Y$ に対して $E_y\in\mathfrak{M}_1$；

ii) $\mu_2(E_x)$ は x の $\mathfrak{M}_1$-可測函数であり，

$\mu_1(E_y)$ は y の $\mathfrak{M}_2$-可測函数である；

iii) $$\int_X\mu_2(E_x)d\mu_1(x)=\int_Y\mu_1(E_y)d\mu_2(y)=\mu(E),$$

従って $\mu(E)<\infty$ ならば μ_1-a. e. x に対して $\mu_2(E_x)<\infty$，μ_2-a. e. y に対して $\mu_1(E_y)<\infty$ である．

2) $f(z)\equiv f(x,\ y)$ が $\mathfrak{M}$-可測で μ-a. e. z に対して $f(z)\geqq 0$ ならば

i) μ_1-a. e. $x\in X$ に対して $f(x,\ y)$ は y の函数として $\mathfrak{M}_2$-可測であり，

μ_2-a. e. $y\in Y$ に対して $f(x,\ y)$ は x の函数として $\mathfrak{M}_1$-可測である；

ii) $\int_Y f(x,\ y)d\mu_2(y)$ は x の $\mathfrak{M}_1$-可測函数であり，

$\int_X f(x,\ y)d\mu_1(x)$ は y の $\mathfrak{M}_2$-可測函数である；

iii) $$\int_X d\mu_1(x)\int_Y f(x,\ y)d\mu_2(y)=\int_Y d\mu_2(y)\int_X f(x,\ y)d\mu_1(x)=\int_Z f(z)d\mu(z)$$

(三つとも ∞ である場合を含む)．

3) $f(z)=f(x,\ y)$ が Z の上の複素数値 $\mathfrak{M}$-可測函数であって，μ について可積分ならば，

i) μ_1-a. e. $x\in X$ に対して $f(x,\ y)$ は y の函数として Y の上で可積分であり，

μ_2-a. e. $y\in Y$ に対して $f(x,\ y)$ は x の函数として X の上で可積分である；

ii) $\int_Y f(x,\ y)d\mu_2(y)$ は x の函数として X の上で可積分であり，

$\int_X f(x,\ y)d\mu_1(x)$ は y の函数として Y の上で可積分である；

iii) $$\int_X d\mu_1(x)\int_Y f(x,\ y)d\mu_2(y)=\int_Y d\mu_2(y)\int_X f(x,\ y)d\mu_1(x)=\int_Z f(z)d\mu(z).$$

系. 前の定理の系が $\mathfrak{B}_Z$-可測のかわりに $\mathfrak{M}$-可測として成立する．

$X=R^p$，$Y=R^q$，$Z=R^{p+q}$ として各々の中で Lebesgue 測度を考えると，Euclid 空間における Lebesgue 積分に関する Fubini の定理が得られる．

さて定理 15. 2 の証明に入ろう．条件 (15. 2_1), (15. 2_2) が仮定されているから，$Z_k=X_k\times Y_k$ $(k=1, 2, \cdots)$ とおくと

(15. 4) $Z_1\subset Z_2\subset\cdots\subset Z_k\subset\cdots\subset Z,\ \ Z_k\in\mathfrak{B}_Z,\ \ \mu(Z_k)<\infty,\ \ \lim Z_k=Z$

となる．また §9 におけるように，Z の中の集合で有限個の矩形集合の直和として表わされるものの全体を $\mathfrak{F}$ とすると，$\mathfrak{F}$ は有限加法族で $\mathfrak{B}_Z=\mathfrak{B}[\mathfrak{F}]$ であり，集合 $K\in\mathfrak{F}$ は

(15. 5)
$$K=(E_1\times F_1)+\cdots+(E_n\times F_n)$$
$$(E_j\in\mathfrak{B}_X,\ \ F_j\in\mathfrak{B}_Y;\ j=1,\ \cdots,\ n)$$

と表わされる．

定理 15. 2 の 1) の証明.

i) $\mathfrak{M}=\{E;\ E\subset Z,$ すべての $x\in X$ に対して $E_x\in\mathfrak{B}_Y\}$ とすると $\mathfrak{M}\supset\mathfrak{F}$ である；なぜならば，任意の $K\in\mathfrak{F}$ は (15. 5) の形に書けるから，K_x は有限個の $F_j\in\mathfrak{B}_Y$ の直和または空集合，従って $K_x\in\mathfrak{B}_Y$ である．また $\mathfrak{M}$ は単調族である．それは

(15. 6) $\{E^{(n)}\}$ が単調増加（または減少）で $\lim E^{(n)}=E$

ならば

(15. 7) $\{[E^{(n)}]_x\}$ が単調増加（または減少）で $\lim\ [E^{(n)}]_x=E_x$

となるからである．だから定理 15. 1 により $\mathfrak{M}\supset\mathfrak{B}[\mathfrak{F}]\equiv\mathfrak{B}_Z$；すなわち，$E\in\mathfrak{B}_Z$ ならばすべての $x\in X$ に対して $E_x\in\mathfrak{B}_Y$ である．同様にして，すべての $y\in Y$ に対して $E_y\in\mathfrak{B}_X$ なることも証明できる．

ii) k を任意に固定して

$$\mathfrak{M}_k=\{E\,;E\in\mathfrak{B}_Z,\ \ \mu_2([E\cap Z_k]_x)\ \text{が}\ x\ \text{の}\ \mathfrak{B}_X\text{-可測函数}\}$$

とおくと，i) の証明と同様にして $\mathfrak{M}_k\supset\mathfrak{F}$ である．また $\mathfrak{M}_k$ は単調族である．なぜならば，$E^{(n)}\in\mathfrak{B}_Z$ で (15. 6) が成立すれば，任意の $x\in X$ に対して

(15. 8)
$$\begin{cases}\{[E^{(n)}\cap Z_k]_x;\ n=1,\ 2,\ \cdots\}\ \text{は単調増加（または減少）で}\\ \lim\limits_{n\to\infty}\ [E^{(n)}\cap Z_k]_x=[E\cap Z_k]_x\end{cases}$$

となるから

$$\lim_{n\to\infty}\ \mu_2([E^{(n)}\cap Z_k]_x)=\mu_2([E\cap Z_k]_x)^{*)}$$

が成立し，従って $\mu_2([E\cap Z_k]_x)$ は $\mathfrak{B}_X$-可測である；すなわち $E\in\mathfrak{M}_k$ である．だから

*) 単調減少の場合には $\mu_2([E^{(1)}\cap Z_k]_x)<\infty$ なることを使っている（定理 6. 2 およびその後の注意参照）．E のかわりに $E\cap Z_k$ を考えたのはこのためである．次の iii) の証明でも同様である．

定理 15. 1 により $\mathfrak{M}_k \supset \mathfrak{B}[\mathfrak{F}] \equiv \mathfrak{B}_Z$. ここで k は任意だから $\mathfrak{B}_Z \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}_k$, すなわち $E \in \mathfrak{B}_Z$ ならばすべての k に対して $\mu_2([E \cap Z_k]_x)$ は $\mathfrak{B}_X$- 可測である．ところがすべての x に対して

(15. 9)　　$\{[E \cap Z_k]_x;\ k=1, 2, \cdots\}$ は単調増加で $\lim_{k\to\infty} [E \cap Z_k]_x = E_x$.

だから

(15. 10)　　$$\mu_2(E_x) = \lim_{k\to\infty} \mu_2([E \cap Z_k]_x)$$

となり，$\mu_2(E_x)$ は $\mathfrak{B}_X$- 可測である．$\mu_1(E_y)$ についても同様に証明できる．

iii) k を任意に固定して

$$\mathfrak{M}_k = \left\{E;\ E \in \mathfrak{B}_Z,\ \int_X \mu_2([E \cap Z_k]_x) d\mu_1(x) = \mu(E \cap Z_k)\right\}$$

とおくと，前と同様にして $\mathfrak{M}_k$ は $\mathfrak{F}$ を含む単調族である（単調族なることは，(15. 6) から (15. 8) が出ることにより，定理 13. 2 と定理 13. 6 の系 1 とを使って言える）から，定理 15. 1 によって $\mathfrak{M}_k \supset \mathfrak{B}_Z$. 従って任意の $E \in \mathfrak{B}_Z$ に対して (15. 9), (15. 10) により

$$\int_X \mu_2(E_x) d\mu_1(x) = \lim_{k\to\infty} \int_X \mu_2([E \cap Z_k]_x) d\mu_1(x) = \lim_{k\to\infty} \mu(E \cap Z_k) = \mu(E).$$

同様にして $\int_X \mu_1(E_y) d\mu_2(y) = \mu(E)$ も証明できる．従って $\mu(E) < \infty$ なら定理 12. 2 の 2°) により μ_1-a. e. x に対して $\mu_2(E_x) < \infty$, μ_2-a. e. x に対して $\mu_1(E_y) < \infty$ である．

定理 15. 2 の 2) の証明.

i) $f(z) = \chi_E(z)$ $(E \in \mathfrak{B}_Z)$ のときは，$z = \langle x, y\rangle$ に対して

$$f(z) \equiv f(x, y) = \chi_{E_x}(y) = \chi_{E_y}(x)$$

となるから，1) の i) によって 2) の i) は明らかである．従って $f(z)$ が $\mathfrak{B}_Z$- 可測な単函数のときもこの i) が成立する．任意の $f(z) \geqq 0$ なる可測函数 f は，$\mathfrak{B}_Z$- 可測な単函数の単調増加列 $\{f_n\}$ の極限函数として表わされる（定理 10. 1）から，そのような $f(z)$ に対しても i) が成立する．

ii) $f(z) = \chi_E(z)$ $(E \in \mathfrak{B}_Z)$ のときは，上の i) の証明と同様にして

$$\int_Y f(x, y) d\mu_2(y) = \int_Y \chi_{E_x}(y) d\mu_2(y) = \mu_2(E_x)$$

が成立するから，1) の ii) に帰着される．従って任意の $\mathfrak{B}_Z$- 可測単函数に対して 2) の ii) が成立する．一般の $\mathfrak{B}_Z$- 可測函数 $f(z) \geqq 0$ についても，上の i) の証明に述べたような $\{f_n\}$ をとれば

$$\int_Y f(x,y)d\mu_2(y)=\lim_{n\to\infty}\int_Y f_n(x,y)d\mu_2(y).$$

だから $\int_Y f(x,y)d\mu_2(y)$ は x の $\mathfrak{B}_X$-可測函数である．$\int_X f(x,y)d\mu_1(x)$ についても同様である．

iii) の証明も，1) の iii) を使って，上と同様の論法でできる．

定理 15. 2 の 3) の証明．仮定のような函数 f は

$$\begin{cases} f=f_1-f_2+i(f_3-f_4) \quad (i \text{ は虚数単位}), \\ \text{各 } j(=1,2,3,4) \text{ に対して } f_j\geqq 0 \text{ で，} f_j \text{ は } Z \text{ の上で可積分} \end{cases}$$

と表わされる．各 f_j に対して 2) の i), ii), iii) がすべて成立し，従って

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1\text{-a. e. } x \text{ に対して } \int_Y f_j(x,y)d\mu_2(y)<\infty \\ \mu_2\text{-a. e. } y \text{ に対して } \int_X f_j(x,y)d\mu_1(y)<\infty \end{array}\right\}(j=1,2,3,4).$$

だからはじめの函数 $f(x,y)$ も同じ性質をもち，3) の i), ii), iii) が成立することがわかる．

定理 15. 2 の系の証明は次のようにすればよい．まず $f(z)$ が $\mathfrak{B}_Z$-可測なことにより，$|f(z)|$ も $\mathfrak{B}_Z$-可測だから，$|f(z)|$ に定理 15. 2 の 2) を適用すれば (15. 3) の三つの積分は相等しい．だから，その三つのうちどれか一つが有限ならば，三つとも有限．従って特に $f(z)$ は Z の上で可積分となる．だから定理 15. 2 の 3) の事柄がすべて成立することになる．

定理 15. 3 の証明には次の二つの補助定理を使う．記号の意味は定理に述べたとおりとする．

補助定理 3. $E\in\mathfrak{M}$, $\mu(E)=0$ ならば

$$\mu_1\text{-a. e. } x \text{ に対して } \mu_2(E_x)=0, \quad \mu_2\text{-a. e. } y \text{ に対して } \mu_1(E_y)=0.$$

証明．測度空間の完備化の性質（定理 8. 3）により，$B\supset E$, $\mu(B)=\mu(E)=0$ なる集合 $B\in\mathfrak{B}_Z$ が存在する．だから定理 15. 2 の 1), iii) により

$$\mu_1\text{-a. e. } x \text{ に対して } \mu_2(E_x)\leqq\mu_2(B_x)=0,$$
$$\mu_2\text{-a. e. } y \text{ に対して } \mu_1(E_y)\leqq\mu_1(B_y)=0$$

となる．

補助定理 4. $f(z)$ が $\mathfrak{M}$-可測で，すべての z に対して $f(z)\geqq 0$ ならば，$\mathfrak{B}_Z$-可測函数 $g(z)$ で $f(z)\geqq g(z)\geqq 0$, $\mu(Z(f\neq g))=0$ なるものが存在する．

これは定理 10. 10 の特別の場合である．

この二つの補助定理により，定理 15. 3 の各項および系は，定理 15. 2 の対応する各項および系にそれぞれ帰着させて，容易に証明できる．くわしい証明は読者諸氏にて試みられたい．

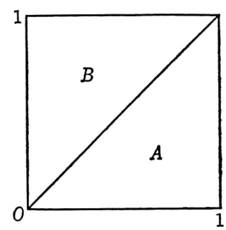
注意 1. 定理 15. 2 (15. 3 についても同様) の 2) におけるように $f(x, y)\geqq 0$ が仮定されていれば，iii) によって積分の順序を変えることは自由であるが，$f(x, y)$ の符号が変るときは，3) におけるように $Z=X\times Y$ の上で可積分なことを仮定しなければ，3) iii) のはじめの二つの積分が存在しても，その二つが相等しいとは限らないし，まして第三の積分は存在するかどうかもわからない．たとえば $X=(0, 1]$, $Y=(0, 1]$, $Z=X\times Y$ の上で普通の Lebesgue 測度を考え，ここで函数

(15. 11)
$$f(z)\equiv f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\qquad (z=\langle x, y\rangle)$$

を考える．この函数は $F(x, y)=\mathrm{Arctan}(x/y)$ から

(15. 12)
$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\frac{-x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$$

として得られたものである．Z の中で $x\geqq y$, $x<y$ なる部分をそれぞれ A, B (右図) とすると，A では



$$f^+(x, y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad f^-(x, y)=0$$

であり，B では

$$f^+(x, y)=0,\ f^-(x, y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

だから

$$\int_Z f^+(z)dz=\int_0^1 dx\int_0^1 f^+(x,y)dy\qquad (f^+\geqq 0 \text{ だから積分の順序は自由})$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy=\int_0^1\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{y=x}dx\qquad ((15.\ 12) \text{ により})$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{2x}=\infty.$$

同様にして $\int_Z f^-(z)dz=-\infty$ となるから，$\int_Z f(z)dz$ は存在しない．一方次に示すように，3) iii) のはじめの二つの積分は，上の函数 $f(x,y)$ に対しては，どちらも存在するが相等しくない：

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x, y)dy=\int_0^1\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{y=1}dx=\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,\ y)dx=\int_0^1\left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_{x=0}^{x=1}dy=-\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}=-\frac{\pi}{4}.$$

注意 2. 定理 15. 2 および 15. 3 において，$f(x,y)$ が積空間 Z の上の函数として可測（$\mathfrak{B}_Z$- 可測または $\mathfrak{M}$- 可測）という仮定は重要である．$f(x,\ y)$ が

i) x を任意に固定したとき y の可積分函数*)で，$\int_Y f(x,\ y)d\mu_2(y)$ が x の可積分函数，従って $\int_X d\mu_1(x)\int_Y f(x,\ y)d\mu_2(y)$ が存在し，

しかも

ii) y を任意に固定したとき x の可積分函数で，$\int_X f(x,\ y)d\mu_1(x)$ が y の可積分函数，従って $\int_Y d\mu_2(y)\int_X f(x,\ y)d\mu_1(x)$ が存在する

という場合でも，$f(x,\ y)$ が Z の上で可測とはかぎらないから，$\int_Z f(z)d\mu(z)$ を考えることすらできないことがある．（反例はこの § の最後に述べておくが，集合の濃度，順序数，超限帰納法を使わなければならないから，必ずしも読まれなくてもよい．ただ，そのような函数もあるということを知っておいていただきたい．）

注意 3. 上の定理の記号で，Z の点 $z=\langle x,\ y\rangle$ に関係した命題 $\boldsymbol{P}(x,\ y)$ があり，集合 $E=\{\langle x,\ y\rangle\ ;\ \boldsymbol{P}(x,\ y)$ が成立する$\}$ が $\mathfrak{M}$ に属するとする．このとき

i) $\mu(E)>0$ ならば，或る $\mu_1(E_1)>0$ なる $E_1\subset X$ が存在して，任意の $x\in E_1$ に対して

(15. 13) 集合 $\{y;\ \boldsymbol{P}(x,\ y)$ が成立する$\}$**) の μ_2 測度が正である．

従って特に，(15. 13) が成立するような x が少なくも一つは存在する．また

ii) $\mu_1(A)>0$ なる $A\subset X$ と $\mu_2(B)>0$ なる $B\subset Y$ とがあって，任意の $x\in A$（或いは μ_1-a. e. $x\in A$）に対して

(15. 14) μ_2-a. e. $y\in B$ において***) $\boldsymbol{P}(x,\ y)$ が成立する

ならば，μ_2-a. e. $y\in B$ に対して

(15. 15) μ_1-a. e. $x\in A$ において $\boldsymbol{P}(x,\ y)$ が成立する．

---

*) 単に‘可積分’といえば，可測函数であって可積分なことである．

**) この集合は x に関係して変る．

***) このとき B の中で $\boldsymbol{P}(x,\ y)$ が成立しないような y の集合は（μ_2-測度 0 であるが）x に関係して変化するから，この ii) は決して自明ではない．同様に次の (15. 15) においても，A の中で $\boldsymbol{P}(x,\ y)$ が成立しないような x の集合（その μ_1-測度は 0）は y によって変る．

従って特に，(15. 15) が成立するような y が少なくも一つは存在する．

i) の証明．任意の $x\in X$ を固定するとき $\{y;\ \boldsymbol{P}(x,\ y)$ が成立する$\}=E_x$ (E の x による切り口) である．そして，$\mu(E)>0$ ならば定理 15. 3 の 1) により $\mu_2(E_x)$ は x の可測函数で

$$\int_X \mu_2(E_x)d\mu_1(x)=\mu(E)>0.$$

だから，$E_1=\{x;\ \mu_2(E_x)>0\}$ は可測集合で $\mu_1(E_1)>0$ である．

ii) の証明．$K=A\times B$ ($\subset Z=X\times Y$) とおく．(15. 14), (15. 15) はそれぞれ

$$\mu_2(B-E_x)=0,\quad \mu_1(A-E_y)=0$$

を意味する．よって，K の部分集合 $K-E$ に定理 15. 3 の 1) を適用して ($E\subset K$ とはかぎらないが，そのことは以下の議論に影響しない)

$$\int_B \mu_1(A-E_y)d\mu_2(y)=\int_B \mu_1([K-E]_y)\,d\mu_2(y)$$

$$=\int_A \mu_2([K-E]_x)d\mu_1(x)=\int_A \mu_2(B-E_x)d\mu_1(x)=0$$

となるから，μ_2-a. e. $y\in B$ に対して $\mu_1(A-E_y)=0$, すなわち (15. 15) が成立する．

上の i) または ii) の事実を使う場合に，上に述べたような証明を一々書かないで，単に‘Fubini の定理により’と書いて使うことが，測度論 (およびそれを応用した解析の各分野) においてしばしばある．‘Fubini の定理’というと，単に漠然と‘積分の順序の交換を保証する定理’というように思う人が多いようであるが，上のような使い方もよく理解しておくとよい．(例えば定理 21. 2 の証明において ii) の $A=B=R^N$ の場合が使われる．*)) なお，$\boldsymbol{P}(x,\ y)$ の成立，不成立が Z の中の或る一部分だけで意味を持つ場合には，$\boldsymbol{P}(x,\ y)$ が意味を持たない点では‘$\boldsymbol{P}(x,\ y)$ は成立しない’と定義しておけば，上に述べたことおよびその証明はそのまま成立する．

問 1. $X,\ Y,\ Z$ および $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu$ は本文中のとおりとし，$\mu_1(X)<\infty$, $\mu_2(Y)<\infty$ とする．X の上の複素数値函数 $f(x)$ と Y の上の複素数値函数 $g(y)$ とがあって，$f(x)+g(y)$ が $\langle x,\ y\rangle$ の函数として Z の上で可積分ならば，$f(x)$, $g(y)$ はそれぞれ $X,\ Y$ の上で可積分である．

問 2. $f(x)$ が R^N の上の Lebesgue 可測函数ならば $f(x+y)$, $f(x-y)$ ($+$, $-$ は R^N のベクトルとしての算法) は R^{2N} の上の Lebesgue 可測函数である．

(ヒント．$f\geqq 0$ なる場合に，$0\leqq g(x)\leqq f(x)\leqq h(x)$ であって $g(x)=f(x)=h(x)$ (a. e.) となる B- 可測函数 $g(x)$, $h(x)$ が存在するから (定理 10. 10 の系)，R^{2N} の

---

*) またこの § の最後の小活字の部分で i) を使う．

上で $\int |h(x+y)-g(x+y)|dxdy=0$ となることを証明する.)

問 3. μ を R^N における Lebesgue 測度とし, A, B を R^N の中の Lebesgue 可測集合とすると,

$$\int_{R^N} \mu([A-x]\frown B)d\mu(x)=\mu(A)\mu(B). \qquad \left(\begin{array}{l}[A+x] \text{ は } A \text{ をベクトル } x \\ \text{だけ'平行移動'した集合}\end{array}\right)$$

(ヒント. $\mu([A-x]\frown B)=\int \chi_{[A-x]}(y)\chi_B(y)d\mu(y)=\int \chi_A(y+x)\chi_B(y)d\mu(y)$.)

以後 Lebesgue 測度に関する積分のみを考え, 単に $\int \cdots dx$ と書く.

問 4. $f(x)$, $g(x)$ が R^N で可積分ならば, ほとんどすべての x に対して

$$h(x)=\int_{R^N} f(x-y)g(y)dy$$

が有限な値をとり, $h(x)$ も R^N で可積分である. またこの $h(x)$ は

$$\int_{R^N} g(x-y)f(y)dy$$

にも等しい.

問 5. $x=(x_1, \cdots, x_N)\in R^N$, $\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_N)\in R^N$ に対して $\xi\cdot x=\xi_1x_1+\cdots+\xi_Nx_N$ (R^N のベクトルとしての内積)とし, R^N の上で可積分な函数 $f(x)$ に対して

$$\hat{f}(\xi)=\int_{R^N} e^{-2\pi i\xi\cdot x}f(x)dx \qquad (i \text{ は虚数単位})$$

と定義する. このとき, f, g, h を前問のとおりとすると, すべての $\xi\in R^N$ に対して

$$\hat{h}(\xi)=\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

次の問題は Fubini の定理の応用ではないが, 定理 15. 1 を使う練習であり, その事実は後に定理 30. 7 の証明中に使われる.

問 6. $\mathfrak{M}$ が R^N の中の集合の単調族で, すべての有界な閉区間を含むものとし, 条件

$$A,\ B\in\mathfrak{M},\ A\frown B=\phi \text{ ならば } A+B\in\mathfrak{M}$$

を満たすとすると, $\mathfrak{M}$ は R^N の中のすべての Borel 集合を含む.

最後に, 注意 2 で述べた反例を構成しよう. 以下に使われる一般集合論に関する事項は巻末にあげた書物 [1], [2] などを見られたい.

(第一段) $X=Y=R^1$, 従って $Z=R^2$ とし, X, Y, Z の中の Lebesgue 測度をそれぞれ μ_1, μ_2, μ とすると, μ は μ_1 と μ_2 との直積測度の完備化である. K を Z の中の閉区間 $[0, 1]\times[0, 1]$ とし, Z の中の $\mu(F)>0$ なる閉集合 F で K に含まれるものの全体を $\mathfrak{F}$ とする. 集合族 $\mathfrak{F}$ の濃度は連続体の濃度 $\aleph$ を越えない*)から, $\mathfrak{F}$ を

(15. 16) $$\mathfrak{F}=\{F_0, F_1, F_2, \cdots, F_\xi, \cdots\}$$

と整列して, この中に添字として現われる順序数 ξ はすべて

*) 付録§2 定理 4 参照; 実は $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}=\aleph$ である, なぜならば, すべての $\alpha(0<\alpha\leqq 1)$ に対して閉区間 $[0, \alpha]\times[0, \alpha]$ は $\mathfrak{F}$ に属するからである.

(15. 17) $\xi<\gamma$ （γ は濃度$\aleph$の始数）

となるようにできる．また注意3の i) と §7 の 問6によって

(15. 18) $\begin{cases} \text{各 } F_\xi \in \mathfrak{F} \text{ に対して，} \overline{\overline{A_\xi}}=\aleph \text{ なる集合 } A_\xi \subset X \text{ が存在して} \\ \text{すべての } x \in A_\xi \text{ に対して} \overline{\overline{[F_\xi]_x}}=\aleph \text{ となる（[ ]}_x \text{ は } x \text{ による‘切り口’）.} \end{cases}$

（第二段） すべての $F_\xi \in \mathfrak{F}$ に対して，その中に二点 $z_\xi=(x_\xi, y_\xi)$, $z_\xi'=(x_\xi', y_\xi')$ をとって

(15. 19) $\xi \neq \eta$ ならば $\begin{cases} x_\xi,\ x_\xi',\ x_\eta,\ x_\eta' \text{ はどの二つも相異なり，} \\ y_\xi,\ y_\xi',\ y_\eta,\ y_\eta' \text{ はどの二つも相異なる} \end{cases}$

ようにできることを，超限帰納法によって証明しよう．まず F_0 の中に $z_0=(x_0, y_0)$, $z_0'=(x_0', y_0')$ を $x_0 \neq x_0'$, $y_0 \neq y_0'$ なるようにとれることは (15. 18) により明らかである．今或る λ ($F_\lambda \in \mathfrak{F}$) より小さいすべての順序数 ξ に対して (15. 19) を満たす (x_ξ, y_ξ), (x_ξ', y_ξ') が定められたとすると，$X_\lambda=\{x_\xi, x_\xi'; \xi<\lambda\}$, $Y_\lambda=\{y_\xi, y_\xi'; \xi<\lambda\}$ の濃度は (15. 17) によりいずれも $\aleph$ より小さい．だから，(15. 18) のような A_λ をとると，$A_\lambda - X_\lambda$ の中に相異なる二点 x_λ, x_λ' が存在し，$[F_\lambda]_{x_\lambda} - Y_\lambda$, $[F_\lambda]_{x_\lambda'} - Y_\lambda$ の中にそれぞれ y_λ, y_λ' をとって $y_\lambda \neq y_\lambda'$ とすることができる．よって $z_\lambda=(x_\lambda, y_\lambda)$, $z_\lambda'=(x_\lambda', y_\lambda')$ とすると z_λ, $z_\lambda' \in F_\lambda$ であって，すべての ξ, $\eta \leqq \lambda$ に対して (15. 19) が成立する．よって超限帰納法ですべての F_ξ に対して (15. 19) を満たす z_ξ, z_ξ' がとれる．

（第三段） 上に述べた z_ξ の全体を E, z_ξ' の全体を E' とし $\mu^*(E)=\mu^*(E')=1$ (μ^* は Lebesgue 外測度）を証明する．そのためまず

(15. 20) G が $Z(=R^2)$ の中の開集合で $G \supset E$ ならば $\mu(G) \geqq 1$

となることを証明しよう．もしも $\mu(G)<1$ とすると，$K-G$ は閉集合であって $\mu(K-G) \geqq \mu(K)-\mu(G)=1-\mu(G)>0$ だから，$K-G$ は或る $F_\xi \in \mathfrak{F}$ に一致する．従って $K-G$ の中に或る z_ξ が存在するから，$(K-G) \frown E \neq \phi$ となり $G \supset E$ に反する．よって (15. 20) が成立する．だから定理 7. 3 により $\mu^*(E) \geqq 1$ となるが，一方 $\mu^*(E) \leqq \mu(K)=1$ だから $\mu^*(E)=1$ である．同様に $\mu^*(E')=1$ も証明できる．また E と E' とは，その作り方から明らかなように，たがいに交わらない．以上のことから，E と E' が Lebesgue 可測集合でない．なぜならば，もしも E が Lebesgue 可測であるとすると，$\mu(E)=1$ で $K-E$ も Lebesgue 可測だから，$\mu^*(E') \leqq \mu^*(K-E)=\mu(K)-\mu(E)=0$ となり不合理である．*)

（第四段） 上記の E の定義函数を $f(x, y)$ とすると，$f(x, y)$ は Z の上で μ-可測ではない．しかし，任意の x を固定するとき

$\begin{cases} x \text{ が或る } x_\xi \text{ に等しければ } f(x, y)=1 \ (y=y_\xi \text{ のとき}),\ =0 \text{（その他の } y \text{ で），} \\ x \text{ がどの } x_\xi \text{ にも等しくなければ } f(x, y)=0 \text{（すべての } y \text{ で）.} \end{cases}$

同様に，任意の y を固定するとき

$\begin{cases} y \text{ が或る } y_\xi \text{ に等しければ } f(x, y)=1 \ (x=x_\xi \text{ のとき}),\ =0 \text{（その他の } x \text{ で），} \\ y \text{ がどの } y_\xi \text{ にも等しくなければ } f(x, y)=0 \text{（すべての } x \text{ で）.} \end{cases}$

---

*) E と E' とを入れかえても同様だから，E' も Lebesgue 可測でない．

だから $f(x, y)$ はこの § の注意 2 に書いた i), ii) を満たしている.*)

なおこの例が, §11 の注意 3 で予告した反例になっていることも, 明らかである.

§ 16. Riemann 積分と Lebesgue 積分との関係

この § では, Euclid 空間における Riemann 積分と Lebesgue 積分との関係について簡単に説明するが, この § の内容のうちで応用上重要なのは被積分函数が連続の場合（特に本書の中で必要なのはその場合だけ）であり, その場合は前に述べたから（§12 問 1), この § は読まずに進まれてもよい.

本質的でない複雑さを避けるために R^1 の場合を述べるが, R^N の場合も全く同様である. R^1 の上の Lebesgue 測度を μ とする. この § にかぎり, 函数 $f(x)$ の Riemann 積分, Lebesgue 積分をそれぞれ $\int f(x)dx$, $\int f(x)d\mu(x)$ と書くことにする. なお Riemann 積分とは狭義 Riemann 積分を意味する.

まず Riemann 積分について, ここで直接使う事項だけを述べておく. 函数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で Riemann 積分可能とすると有界（下記注意 1 を見よ）であるから,

$$m \leqq f(x) \leqq M \tag{16. 1}$$

なる m, M がある. 区間 $[a, b]$ を 2^n 等分した分点を

$$a=a_{n,0}<a_{n,1}<a_{n,2}<\cdots<a_{n,2^n-1}<a_{n,2^n}=b \tag{16. 2}$$

とし, 区間 $[a_{n,k-1}, a_{n,k}]$ における $f(x)$ の下限, 上限をそれぞれ m_{nk}, M_{nk} として

$$s_n=\sum_{k=1}^{2^n} m_{nk}\frac{b-a}{2^n}, \quad S_n=\sum_{k=1}^{2^n} M_{nk}\frac{b-a}{2^n} \tag{16. 3}$$

とおくと,

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\int f(x)dx \text{ **)} \tag{16. 4}$$

(積分範囲はいつも $[a, b]$ を考えるから, $\int_a^b$ を単に $\int$ とだけ書く; Lebesgue 積分の場合も同様).

注意 1. Riemann 積分（狭義）の定義には, はじめから $f(x)$ の有界性を仮定すること

---

*) 上記の E の x による切り口はたかだか ($x=x_\xi$ のときだけ) 一点 (y_ξ) からなり, y による切り口はたかだか ($y=y_\xi$ のときだけ) 一点 (x_ξ) からなる. そして E は非可測集合（外測度が 1）である. 上に述べた f の性質は, E のこれらの性質を言いかえたにすぎない.

**) 例えば, 三村征雄編, 大学演習微分積分学（裳華房). 84 頁 — 85 頁 および 93 頁の例題 8 とその解（十分であることの証明）参照.

も多いが，それを仮定しておかなくても，積分可能（有限）なることから有界性が出る．

定理 16. 1. i) $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で Riemann 積分可能ならば Lebesgue 可測である；ii) 逆は真でない．

証明. i) 区間 $[a, b]$ の 2^n 等分点を上に述べたように $a_{n,k}$ $(k=0, 1, 2, \cdots, 2^n-1, 2^n)$ とし，m_{nk}, M_{nk}, s_n, S_n も上に述べたとおりとする．$[a, b]$ の上で函数 $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ を次のように定義する：

$$(16.\ 5)\qquad \begin{cases} \varphi_n(a)=\psi_n(a)=f(a) \\ \left.\begin{array}{l}\varphi_n(x)=m_{nk} \\ \psi_n(x)=M_{nk}\end{array}\right\} (a_{n,k-1}<x\leqq a_{n,k}),\ \ k=1, 2, 3, \cdots, 2^n. \end{cases}$$

このとき $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ は Borel 可測，従ってもちろん Lebesgue 可測である．さらに

$$\varphi_n(x)\leqq f(x)\leqq\psi_n(x)$$

であって，各点 x において $\{\varphi_n(x)\}$, $\{\psi_n(x)\}$ は n についてそれぞれ単調増加，単調減少である（分割法が 2^n 等分法によっているから）．よって

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x),\quad \psi(x)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)$$

が存在し，すべての n とすべての x に対して

$$(16.\ 6)\qquad m\leqq\varphi_n(x)\leqq\varphi(x)\leqq f(x)\leqq\psi(x)\leqq\psi_n(x)\leqq M.$$

だから $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ は Lebesgue 積分可能で，定理13. 6の系2により

$$(16.\ 7)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int\varphi(x)d\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n(x)d\mu(x), \\ \displaystyle\int\psi(x)d\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\int\psi_n(x)d\mu(x). \end{cases}$$

ところが Lebesgue 積分の定義と（16. 3）により

$$(16.\ 8)\qquad \int\varphi_n(x)d\mu(x)=s_n,\quad \int\psi_n(x)d\mu(x)=S_n.$$

だから（16. 4）と（16. 7）により

$$\int\varphi(x)d\mu(x)=\int\psi(x)d\mu(x).$$

ところが（16. 6）により $\varphi(x)\leqq\psi(x)$ だから，

$$\int|\psi(x)-\varphi(x)|d\mu(x)=\int\{\psi(x)-\varphi(x)\}d\mu(x)=0.$$

だから $\varphi(x)=\psi(x)$ (a. e. x)．これと（16. 6）とから $\varphi(x)=f(x)=\psi(x)$ (a. e. x)．

ここで $\varphi(x)$, $\psi(x)$ は Lebesgue 可測だから, $f(x)$ も Lebesgue 可測である.

ii) 逆の成立しない例. 区間 $[0, 1]$ で, x が有理数のとき $f(x)=1$, x が無理数のとき $f(x)=0$ とすると,*) $f(x)$ は Lebesgue 可測でしかも有界であるが Riemann 積分可能ではない. $[0, 1]$ における $f(x)$ の Darboux の上積分, 下積分**) はそれぞれ 1, 0 となる.

系. $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で Riemann 積分可能ならば, $f(x)$ の不連続点の集合の Lebesgue 測度は 0 である.

証明. 不連続点の集合を D とし, 上の定理の証明中の分点 $a_{n,k}$ ($k=0, 1, 2, 3, \cdots, 2^n$; $n=1, 2, \cdots$) の全体を A とする. A は可算集合だから $\mu(A)=0$ である. $x_0\in D-A$ ならば, x_0 は分割 (16. 2) において, いつも或る区間 $[a_{n,k-1}, a_{n,k}]$ の内点になっているから, $f(x)$ が x_0 で不連続なことと函数 φ_n, ψ_n, φ, ψ の作り方からわかるように $\varphi(x_0)<\psi(x_0)$ である. ところが $\varphi(x)=\psi(x)$ (a. e.) であったから

$$\mu(D-A)\leqq\mu(\{x;\ \varphi(x)<\psi(x)\})=0.$$

だから $\mu(D)\leqq\mu(A)+\mu(D-A)=0$.

定理 16. 2. $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で Riemann 積分可能ならば, Lebesgue 積分可能であって, 両方の積分の値は相等しい.

証明. $f(x)$ が Riemann 積分可能だから, 上に述べたように有界であって Lebesgue 可測である; 従って Lebesgue 積分可能である. $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ を定理 16. 1 の証明のとおりとすると (16. 6), (16. 8) により

$$s_n=\int\varphi_n(x)d\mu(x)\leqq\int f(x)d\mu(x)\leqq\int\psi_n(x)d\mu(x)=S_n \qquad (n=1, 2, \cdots).$$

$n\to\infty$ のとき, (16. 4) により s_n, S_n ともに $\int f(x)dx$ に近づくから, 上の式から

$$\int f(x)d\mu(x)=\int f(x)dx$$

を得る. (証明終)

注意 2. $f(x)$ が<u>開</u>区間 (a, b) で<u>広義</u> Riemann 積分可能のときも, 定理16. 1とその系が成立することは容易にわかる —— ここで $a=-\infty$, $b=\infty$ でもよい. しかし定理 16. 2 は広義 Riemann 積分可能の仮定だけでは成立しない (§12, 注意 1 参照).

問 1. $f(x)$ が開区間 $(0, \infty)$ に含まれる任意の有限閉区間で狭義 Riemann 積分可能

---

*) この函数 $f(x)$ は §6 で述べた Dirichlet の函数である.

**) 111 頁脚注の書物の 375 頁参照.

で，$|f(x)|$ が $(0, \infty)$ で広義 Riemann 積分可能ならば，$f(x)$ は $(0, \infty)$ で Lebesgue 積分可能であって $\int_0^\infty f(x)d\mu(x)=\int_0^\infty f(x)dx$.

問 2. 開区間 $(0, 1)$ で広義 Riemann 積分可能であるが Lebesgue 積分可能でない例を作れ．(§12，注意1の例——$(0, \infty)$ の場合——にならえ.)

付記. Baire(ベール)函数，Baire の階級

この項に述べる事柄も，本書においては今後本質的に使うことはないから，最初は読まないで次へ進み，他の書物を読まれる場合に必要が起ってからここを読まれてもよい．

また本項では話を Euclid 空間の場合に限ることにする．適当な位相空間の場合への拡張は（位相空間に関する初等的知識を持って居られる方には容易であるけれども，その知識を仮定することは）本シリーズの趣旨には適当でないと思われるので，最後に簡単に述べるだけにする（注意3）.

以下本項では，函数といえば実数値（$\pm\infty$ をとらない）函数を意味するものとする．

Euclid 空間 R^N の上の二つの函数 f，g に対して，$f\vee g$，$f\wedge g$ とは，それぞれ各点 $x\in R^N$ で

$$f\vee g(x)=\max\{f(x),\ g(x)\},\quad f\wedge g(x)=\min\{f(x),\ g(x)\}$$

によって定義される函数を表わす．三つ以上の函数についても，$f_1\vee f_2\vee\cdots\vee f_n$，$f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_n$ を同様に定義する．

R^N の上の有界連続函数の全体を $\boldsymbol{C}$ とすると，

(1)　$\begin{cases} f,\ g\in\boldsymbol{C} \text{ で，} \alpha \text{ が任意の実数ならば，} \\ \alpha f,\ f+g,\ f\vee g,\ f\wedge g \text{ はすべて } \boldsymbol{C} \text{ に属する．} \end{cases}$

また R^N の上の連続函数 $f(x)$ で，集合 $\{x;\ f(x)\neq 0\}$ が有界集合（それは函数 f により異ってよい）であるようなもの全体を $\boldsymbol{C}_0$ とし，R^N の上の連続函数（有界とはかぎらない）の全体を $\tilde{\boldsymbol{C}}$ とすると，$\boldsymbol{C}_0$ も $\tilde{\boldsymbol{C}}$ も (1) と同じ条件を満たす．一般に函数の集まり（函数族）$\boldsymbol{E}$ が条件 (1)（ただし $\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{E}$ と書く）を満たすとき，本項では $\boldsymbol{E}$ が函数の**ベクトル束**(そく)をなすと言うことにする．

ベクトル束という言葉は本来もっと一般に定義されるべきものであって，上の条件 (1) は，函数の集合が（普通の加法，定数倍，大小関係に関して，本来の意味の）ベクトル束をなすための一つの十分条件であるが，ベクトル束の一般論に立入ることは本書の程度を越えるので，ここでは定理や説明を述べるための言葉として上のように約束する．ベクトル束という言葉をも避けたいならば，以下においてその言葉のかわりに (1) に相当する条件を書けばよい．

R^N の上の函数族 $\boldsymbol{M}$ が（**函数の**）**単調族**であるとは，

(2_1) $\begin{cases}\text{函数列 } \{f_n\}\subset \boldsymbol{M} \text{ が単調増加で，各点 } x \text{ で有限な極限値 } f(x)=\lim f_n(x) \\ \text{をもつならば } f\in \boldsymbol{M},\end{cases}$

(2_2) $\begin{cases}\text{函数列 } \{f_n\}\subset \boldsymbol{M} \text{ が単調減少で，各点 } x \text{ で有限な極限値 } f(x)=\lim f_n(x) \\ \text{をもつならば } f\in \boldsymbol{M}\end{cases}$

がともに成立することである．例えば R^N の上の実数値 Borel 可測函数の全体，実数値 Lebesgue 可測函数の全体は単調族をなす．

§15 で或る集合族を含む最小の単調族（集合の）を考えたと同様に，或る函数族 $\boldsymbol{E}$ に対して，$\boldsymbol{E}$ を含む最小の単調族（函数の）を考えることができる．それを $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{E}]$ と書くことにする．このとき，

補助定理 1. 函数族 $\boldsymbol{E}$ がベクトル束をなすならば，$\boldsymbol{M}[\boldsymbol{E}]$ もベクトル束をなす．

証明は §15 の補助定理 2 とまったく同じ考え方でできる．すなわち，まず

$$\boldsymbol{M}_1=\{f;\ \text{任意の実数 } \alpha \text{ に対して } \alpha f\in \boldsymbol{M}[\boldsymbol{E}]\}$$

とおくと，$\boldsymbol{M}_1$ は $\boldsymbol{E}$ を含む単調族になるから $\boldsymbol{M}_1\supset\boldsymbol{M}[\boldsymbol{E}]$；従って，$f\in\boldsymbol{M}[\boldsymbol{E}]$ なら任意の実数 α に対して $\alpha f\in\boldsymbol{M}[\boldsymbol{E}]$ である．$f+g$, $f\vee g$, $f\wedge g$ については，上の論法を二段階に行えばよい —— くわしくは，§15 の補助定理 2 の証明にならって，読者諸氏が試みられたい．

補助定理 2. $\boldsymbol{M}$ が函数のベクトル束でかつ単調族であるとする．このとき，$f_n\in\boldsymbol{M}$ ($n=1, 2, \cdots$) ならば

$$\sup_{n\geqq 1} f_n,\ \inf_{n\geqq 1} f_n,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n$$

は，それぞれ各点 x で有限な値になるかぎり，$\boldsymbol{M}$ に属する．従って，各点 x で有限な $f=\lim_{n\to\infty} f_n$ が存在すれば，それは $\boldsymbol{M}$ に属する．

証明． $g=\sup_{n\geqq 1} f_n$, $h=\inf_{n\geqq 1} f_n$, $\varphi=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n$, $\psi=\underline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n$ とする．また

$$g_n=f_1\vee\cdots\vee f_n,\quad h_n=f_1\wedge\cdots\wedge f_n,\quad \varphi_n=\sup_{\nu\geqq n} f_\nu,\quad \psi_n=\inf_{\nu\geqq n} f_\nu$$

とおく．$\boldsymbol{M}$ がベクトル束なることにより $g_n\in\boldsymbol{M}$, $h_n\in\boldsymbol{M}$ であり，函数列 $\{g_n\}$, $\{h_n\}$ はそれぞれ単調増加，単調減少で $\lim g_n=g$, $\lim h_n=h$ だから，$\boldsymbol{M}$ が単調族なることにより g, $h\in\boldsymbol{M}$ である．従ってまた φ_n, $\psi_n\in\boldsymbol{M}$ であり，$\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ はそれぞれ単調減少，単調増加で，$\lim \varphi_n=\varphi$, $\lim \psi_n=\psi$ だから φ, $\psi\in\boldsymbol{M}$ となる．従って各点で有限な $f=\lim f_n$ が存在すれば $f\in\boldsymbol{M}$ である．

補助定理 3. C_0, C, $\tilde{C}$ を前に述べたとおりとすると, $M[C_0]=M[C]=M[\tilde{C}]$.

証明. $C_0\subset C\subset\tilde{C}$ だから $M[C_0]\subset M[C]\subset M[\tilde{C}]$ である. だから $\tilde{C}\subset M[C_0]$ なることを示せば $M[\tilde{C}]\subset M[C_0]$ となり証明が終る. $\tilde{C}\subset M[C_0]$ の証明: 任意の点 $x\in R^N$ に対して, R^N の原点から x までの距離を $|x|$ で表わすことにし, $\varphi_n(x)$ を R^N の上の連続函数で

$$\begin{cases} \varphi_n(x)=1 & (|x|\leqq n) \\ 1\geqq\varphi_n(x)\geqq 0 & (n<|x|<n+1) \\ \varphi_n(x)=0 & (|x|\geqq n+1) \end{cases}$$

なるものとする. 任意の $f\in\tilde{C}$ に対して, $f_n(x)=f(x)\varphi_n(x)$ と定義すると

$$f_n\in C_0\subset M[C_0],\quad \lim f_n=f \qquad (\text{各点 } x \text{ で})$$

だから, 補助定理 2 により $f\in M[C_0]$. よって $\tilde{C}\subset M[C_0]$ である. (証明終)

R^N の上のすべての実数値連続函数を含む最小の単調族 B を **Baire 函数族**といい, それに属する函数を **Baire 函数**という. 前に述べた記号を使えば, 補助定理 3 により

$$B\equiv M[\tilde{C}]=M[C]=M[C_0]$$

である. 補助定理 1 により, f, g が Baire 函数で α が任意の実数ならば

$$\alpha f,\quad f+g,\quad f\vee g,\quad f\wedge g$$

は Baire 函数であるが, まったく同様にして, 積 fg も Baire 函数であり, 特に $g(x)$ が決して 0 にならないならば商 f/g も Baire 函数であることが証明できる. また補助定理 2 により, f_n $(n=1, 2, \cdots)$ が Baire 函数ならば

$$\sup_{n\geqq 1} f_n,\ \inf_{n\geqq 1} f_n,\ \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n,\ \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n,\ \lim_{n\to\infty} f_n$$

も, それらが各点で有限な値として存在する限り, Baire 函数である.

定理 1. R^N の上の Baire 函数は Borel 可測である.

証明. C, B を上に述べた通りとし, B' を Borel 可測函数の全体とすると, $B'\supset C$ であって B' は単調族をなすから $B'\supset M[C]=B$ となる.

定理 2. 集合 $A\subset R^N$ が Borel 集合であることと, その定義函数 χ_A が Baire 函数であることとは同等である.

証明. まず $\mathfrak{A}=\{A;\ \chi_A\in B\}$ とおき, $\mathfrak{A}$ が Borel 集合族 $\mathfrak{B}_N$ を含むことを証明する. それには

(3)　$\mathfrak{A}$ はすべての開集合を含み,

(4)　$\mathfrak{A}$ は σ-加法族をなす

ことを示せばよい．

(3) の証明．任意の開集合 $G \subset R^N$ に対して，（定理 11. 4 の証明におけると同様に）

$$f_n(x)=\min\{n\cdot\rho(x,\ G^c),\ 1\}$$

とおくと $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\chi_G(x)$ である．ここで $f_n(x)$ は連続函数だから $\chi_G \in \boldsymbol{B}$ である．すなわち $\mathfrak{A}$ はすべての開集合を含む．

(4) の証明．$\phi\in\mathfrak{A}$ は明らか $(\chi_\phi\equiv 0)$．次に $A\in\mathfrak{A}$ ならば $\chi_{A^c}=1-\chi_A\in\boldsymbol{B}$ だから $A^c \in\mathfrak{A}$．また $A_n\in\mathfrak{A}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ならば $\chi_A=\sup_{n\geqq 1}\chi_{A_n}\in\boldsymbol{B}$ だから $A\in\mathfrak{A}$ である．よって $\mathfrak{A}$ は σ-加法族である．

以上により $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}_N$ がわかったから，Borel 集合の定義函数は Baire 函数である．逆に集合 A の定義函数 χ_A が Baire 函数ならば，定理 1 により χ_A は Borel 可測だから，$A=\{x;\ \chi_A=1\}$ は Borel 集合である．

定理 3. （定理 1 の逆）．R^N の上の実数値 Borel 可測函数は Baire 函数である．

証明．前の定理により Borel 可測な単函数は Baire 函数である．任意の Borel 可測函数 $f\geqq 0$ は Borel 可測単函数の単調増加列の極限函数になるから，Baire 函数である．最後に，任意の実数値 Borel 可測函数 f に対して，f^+，f^- は Borel 可測函数 $\geqq 0$ だから Baire 函数であり，従って f も Baire 函数である．（証明終）

Baire の階級．R^N の上の連続函数を 0 階級の Baire 函数と呼び，その全体を $\boldsymbol{B}_0$ と書くことにする．$\boldsymbol{B}_0$ に属する函数の列の極限として表わされる函数で $\boldsymbol{B}_0$ に属しない函数を 1 階級の Baire 函数と呼び，その全体を $\boldsymbol{B}_1$ と書く．$\boldsymbol{B}_0\cup\boldsymbol{B}_1$ に属する函数の列の極限として表わされる函数で $\boldsymbol{B}_0\cup\boldsymbol{B}_1$ に属しないものを 2 階級の Baire 函数と呼び，その全体を $\boldsymbol{B}_2$ と書く．以下同様にして n 階級の Baire 函数の全体 $\boldsymbol{B}_n$ が定義される．これらを Baire の階級と呼ぶ．$\bigcup_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{B}_n$ だけでは $\boldsymbol{B}$ 全体をつくさないが，これ以上説明を進めるには超限順序数の概念が必要である．

一般に α を $\bar{\alpha}\leqq\aleph_0$*) なる順序数とし，すべての順序数 $\beta<\alpha$ に対して $\boldsymbol{B}_\beta$ が定義されたとき（β が有限の順序数のときは上に述べた），$\bigcup_{\beta<\alpha}\boldsymbol{B}_\beta$ に属する函数の列 $\{f_n\}$ の極限として表わされる函数で $\bigcup_{\beta<\alpha}\boldsymbol{B}_\beta$ に属しないものを α 階級の Baire 函数と呼び，その全体を $\boldsymbol{B}_\alpha$ と書くことにする（f_n の属する階級は各 n ごとに違ってよい）．このように定義した各 $\boldsymbol{B}_\alpha$ に属する函数が Baire 函数であることは明らかである．逆にすべての Baire 函数はどれかの $\boldsymbol{B}_\alpha$ に属する．そのことを証明するには，上のようなすべての $\boldsymbol{B}_\alpha$ の和集

*) $\bar{\alpha}$ は順序数 α の対応する濃度を意味する．また $\aleph_0$ は可算無限の濃度を表わす (§2)．

合が単調族であることを示せばよい．（$\boldsymbol{B}_0$ を含んでいるから．）今 $f_n \in \boldsymbol{B}_{\alpha_n}$, $\bar{\alpha}_n \leqq \aleph_0$ ($n=1, 2, \cdots$) とし，有限な $f=\lim f_n$ が存在すると仮定すると，$\alpha=\sup_{n\geqq 1} \alpha_n$ とおけば，$\bar{\alpha} \leqq \aleph_0$ であって $f \in \bigcup_{\beta \leqq \alpha} \boldsymbol{B}_\beta$ である．すなわち f は上に述べたどれかの階級に属している．以上の $\boldsymbol{B}_\alpha$ を総称して Baire の階級と呼ぶのである．R^N においては，$\bar{\alpha} \leqq \aleph_0$ なるすべての α に対して $\boldsymbol{B}_\alpha$ に属する函数が実際に存在することが証明できるのであるが，ここでは省略する．

注意 1. 上の説明の中では，最初から $\bar{\alpha} \leqq \aleph_0$ なる順序数 α に対してだけ $\boldsymbol{B}_\alpha$ を定義し，それだけで十分なことを証明したが，実は最初にそのことを仮定しなくても，上の構成法から，$\bar{\alpha} > \aleph_0$ なる順序数 α は現われないのである．なぜならば，もしも $\bar{\alpha} > \aleph_0$ なる α に対する $\boldsymbol{B}_\alpha$ が現われたとすると，そのような α の最小のもの α_0 があり，$\bar{\alpha}_0 > \aleph_0$ である．$f \in \boldsymbol{B}_{\alpha_0}$ とすると

$$f_n \in \boldsymbol{B}_{\beta_n}, \quad \beta_n < \alpha_0, \quad f = \lim f_n$$

なる $\{f_n\}$ が存在する．このとき各 β_n は $\bar{\beta}_n \leqq \aleph_0$ だから，$\beta=\sup_{n\geqq 1} \beta_n$ も $\bar{\beta} \leqq \aleph_0$ となり，しかも $f \in \boldsymbol{B}_\beta$ となるはずである．一方 $\bar{\alpha}_0 > \aleph_0$ であるから矛盾である．

例. Dirichlet の函数，すなわち $[0, 1]$ において x が有理数ならば $f(x)=1$, x が無理数ならば $f(x)=0$ なる函数 $f(x)$ は，2 階級の Baire 函数である．なぜならば，$f(x)$ は $[0, 1]$ でいたる所不連続だから，連続函数列の極限函数ではない，*) すなわち $f(x)$ は 0 階級でも 1 階級でもない．一方 $f(x)=\lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} [\cos (m!\pi x)]^{2n})$ なることは容易に験証される．だから $f(x)$ は 2 階級の Baire 函数である．

注意 2. R^N の部分集合 E に対して，E の上のすべての連続函数を含む最小の単調族を，E の上の Baire 函数族という．この場合は上に述べたすべての階級の Baire 函数が存在するとはかぎらない．例えば E が離散集合（孤立点**) ばかりから成る集合）ならば E の上の任意の函数は連続函数であるから，0 階級の Baire 函数である．

注意 3（位相空間に関する初等的知識を持つ方のために）．一般の抽象空間 X の上の実数値函数の一つの族 $\boldsymbol{E}$ がベクトル束をなしているとき，$\boldsymbol{E}$ を含む最小の単調族 $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{E}]$ を $\boldsymbol{E}$ によって定まる Baire 函数族という．X が位相空間のとき，$\boldsymbol{C}$ と $\tilde{\boldsymbol{C}}$ は前の Euclid 空間の場合と同様に定義できて $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{C}]=\boldsymbol{M}[\tilde{\boldsymbol{C}}]$ となるから，これを Baire 函数族と呼びそれに属する函数を Baire 函数と呼ぶが，この場合はあまり応用がない．次に X を局所コンパクトな Hausdorff 空間とし，$\boldsymbol{C}_0$ を X の上の連続函数 $f(x)$ で $\{x; f(x)\neq 0\}$ の閉包がコンパクトであるようなものの全体とする．$\boldsymbol{C}$ と $\tilde{\boldsymbol{C}}$ は Euclid 空間の場合と同様に定義すると，$\boldsymbol{M}[\boldsymbol{C}_0] \subset \boldsymbol{M}[\boldsymbol{C}]=\boldsymbol{M}[\tilde{\boldsymbol{C}}]$ であって，最初の $\subset$ は X が σ-コンパクト（コンパクト集合の可算個の和集合）であるときに限り $=$ となる．$\boldsymbol{M}[\boldsymbol{C}_0] \subsetneqq \boldsymbol{M}[\boldsymbol{C}]$ の場合，

---

*)　付録 §4 の定理 3，定理 4 およびその系を見よ．

**)　付録 §1 参照．

前者を Baire 函数族と定義することが多いが，後者を採用することもある．後者の場合でも，Borel 集合族としてすべての開集合を含む最小の σ- 加法族をとったのでは，定理 2 および 3 は必ずしも成立しない．(X が第二可算公理を満たせば定理 2, 3 は成立する．一般には Borel 可測函数全体の方が Baire 函数族より広い．) しかし，一般の局所コンパクトな Hausdorff 空間を考える場合は，むしろ Borel 集合族を制限するのが普通である；すなわち，Borel 集合族とは

(5)　$\{x;\ f>0,\ f\in \boldsymbol{C}_0\}$ なる形のすべての開集合を含む最小の σ- 加法族，

または

(6)　$\{x;\ f>0,\ f\in \boldsymbol{C}\}$ なる形のすべての開集合を含む最小の σ- 加法族

と定義するのである (X が σ- コンパクトなら (5) と (6) とは同じ，また X が第二可算公理を満たせば，これらは前の定義と同じになる)．Borel 集合族を (5) または (6) とすれば，Baire 函数族をそれぞれ $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{C}_0]$ または $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{C}]$ として定理 1, 2, 3 が成立することは容易にわかる．

IV　加法的集合函数

§17. 加法的集合函数とその変動

空間 X とその部分集合の σ-加法族 $\mathfrak{B}$ とを固定する.

任意の集合 $E\in\mathfrak{B}$ に対して実数値（有限！）をとる集合函数 $\Phi(E)$ が定義されていて, '完全加法性' の条件

(17. 1)　　$E=\sum_{n=1}^{\infty}E_n,\ E_n\in\mathfrak{B},$ ならば $\Phi(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(E_n)$　　(絶対収束)

を満たすとき, $\Phi(E)$ を X の上の**加法的** ($\mathfrak{B}$) **集合函数**または単に（**X の上の**）**加法的集合函数**[*]と呼ぶ. ここでは X と $\mathfrak{B}$ とは固定して話を進めるから, 以後いつも加法的集合函数と呼ぶことにする. また集合は $\mathfrak{B}$ に属するもののみを考えるから, 一々 $E\in\mathfrak{B}$ のように書かない.

加法的集合函数は（測度と違って）正, 負の値をとってよいが, +∞, −∞ の値を決してとらない. だから条件 (17. 1) だけから

(17. 2)　　空集合 ϕ に対しては $\Phi(\phi)=0$

が出る. なぜならば.

$$\Phi(\phi)=\Phi(\phi)+\{\Phi(\phi)+\Phi(\phi)+\cdots\}=\Phi(\phi)+\Phi(\phi)$$

だから, 両辺から $\Phi(\phi)$（有限）を引けば $\Phi(\phi)=0$ を得る. 従って (17. 1), (17. 2) から測度の場合と同様にして, 有限加法性が出る.

集合 $E\in\mathfrak{B}$ に対して複素数値をとる集合函数 $\Phi(E)$ で (17. 1) を満たすものを, **複素数値加法的集合函数**と呼ぶことがある. このとき $\Re\Phi(E)$, $\Im\Phi(E)$ はともに最初に述べた意味の（実数値）加法的集合函数であることは明らかであるから, 複素数値加法的集合函数の性質は, すべて実数値のものの性質に帰着される. だから本書でも実数値のものを取り扱うことにし, 特に複素数値として考えるときは '複素数値' とつけることにする.

加法的集合函数 $\Phi(E)$ が

(17. 3)　　すべての E に対して $\Phi(E)\geqq 0$

のとき**単調増加**といい,

---

*) 本来は完全加法的集合函数と呼ばれるべきものであるが, 30 頁の脚注と同じ理由で単に加法的集合函数と呼ばれる.

(17. 4)　　すべての E に対して $\Phi(E)\leqq 0$

のとき**単調減少**ということがある．そのわけは，$E_1\subset E_2$ ならば，$E_2=E_1+(E_2-E_1)$ と考えると

$$\begin{cases} (17.\ 3) \text{ が成立するときは } \Phi(E_1)\leqq\Phi(E_1)+\Phi(E_2-E_1)=\Phi(E_2), \\ (17.\ 4) \text{ が成立するときは } \Phi(E_1)\geqq\Phi(E_1)+\Phi(E_2-E_1)=\Phi(E_2) \end{cases}$$

となるからである．*)

例. μ を $(X, \mathfrak{B})$ の上の測度で $\mu(X)<\infty$ なるものとする．$X=X_1+X_2$ とし，また二つの数 a, $b\geqq 0$ を固定して

$$\Phi(E)=a\mu(E\cap X_1)-b\mu(E\cap X_2)$$

とすると，Φ は加法的集合函数であり，

$$\begin{cases} b=0 \text{ または } \mu(X_2)=0 \text{ ならば } \Phi \text{ は単調増加}, \\ a=0 \text{ または } \mu(X_1)=0 \text{ ならば } \Phi \text{ は単調減少} \end{cases}$$

となる．後に述べる Hahn（ハーン）の分解定理（定理 17. 6）により，すべての加法的集合函数が適当な測度 μ によって上の形に書けることがわかる．

定理 17. 1. $\Phi(E)$ が加法的集合函数，集合列 $\{A_n\}$ が単調増加または単調減少ならば

$$\Phi(\lim_{n\to\infty} A_n)=\lim_{n\to\infty} \Phi(A_n).$$

証明は定理 6. 2 の i)，ii) の証明とまったく同じである．そこの証明では，集合列 $\{A_n\}$の単調性，測度の完全加法性と $\mu(A_1)$ が有限なことを使っているだけで，$\mu(A_n)\geqq 0$ を使っていないから，そのままこの定理の証明になる．

特に $\Phi(E)$ が単調増加（すなわちすべての E に対して $\Phi(E)\geqq 0$）ならば，これは測度と同じものであり，すべての E に対して $\Phi(E)<\infty$ であるから，測度の性質としての定理 6. 2 の iii) が次のように言いかえられる．

定理 17. 2. $\Phi(E)$ が加法的集合函数で単調増加ならば，

$$\Phi(\varliminf_{n\to\infty} A_n)\leqq\varliminf_{n\to\infty} \Phi(A_n),\quad \Phi(\varlimsup_{n\to\infty} A_n)\geqq\varlimsup_{n\to\infty} \Phi(A_n),$$

従って $\lim_{n\to\infty} A_n$ が存在すれば $\Phi(\lim_{n\to\infty} A_n)=\lim_{n\to\infty} \Phi(A_n)$.

次に，加法的集合函数 $\Phi(E)$ に対して，任意の集合 E に対し

$$\sup_{A\subset E} \Phi(A)$$

---

*) 以下この§では集合函数の‘単調増加（減少）’と集合列の‘単調増加（減少）’とが出て来るから，混同しないように．

を E の上での Φ の**上変動**（または**上変分**）といい $\bar{V}(\Phi;\ E)$ と書く；また

$$\inf_{A\subset E} \Phi(A)$$

を E の上での Φ の**下変動**（または**下変分**）といい $\underline{V}(\Phi;\ E)$ と書く；そして

$$V(\Phi;\ E)=|\bar{V}(\Phi;\ E)|+|\underline{V}(\Phi;\ E)|$$

を E の上での Φ の**全変動**（または**全変分**）或いは**絶対変動**（または**絶対変分**）という．

上変動 $\bar{V}(\Phi;\ E)$ を $\bar{V}_\Phi(E)$ とも書く．また Φ を一つ固定して話を進めるときは，誤解の恐れがないから，単に $\bar{V}(E)$ と書く．下変動，全変動の記号についても同様である．本書でも以後 $\bar{V}(E)$，$\underline{V}(E)$，$V(E)$ を使う．

任意の E に対して，空集合 ϕ は $\phi\subset E$ と考えられるから，上の sup 或いは inf の決定に参加する一つの A のうちに入る．だから $\underline{V}(E)\leqq\Phi(\phi)\leqq\bar{V}(E)$，従って

(17. 5)
$$\underline{V}(E)\leqq 0\leqq\bar{V}(E)$$

ここで $\bar{V}(E)$，$\underline{V}(E)$，$V(E)$ はすべて有限な値をとることを示すため，まず次の補助定理を証明する：

補助定理．もしも $V(X)=\infty$ と仮定すると，次の条件を満たす集合列 $\{X_n;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ が存在することになる：

(17. 6)
$$X_{n+1}\subset X_n,\quad V(X_n)=\infty,\quad |\Phi(X_n)|\geqq n \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

証明．数学的帰納法による．まず $X_0=X$ とおくと，仮定により $V(X_0)=\infty$，$|\Phi(X_0)|\geqq 0$ である．次に，X_0, X_1, $\cdots$, X_n が (17. 6) を満たすように作られたとすると，$V(X_n)=\infty$だから，$|\bar{V}(X_n)|$ と $|\underline{V}(X_n)|$ とのうち少なくも一方は ∞ である．従って

(17. 7)
$$\sup_{A\subset X_n} |\Phi(A)|=\infty.$$

しかも $\Phi(X_n)$ は有限な値だから

(17. 8)
$$|\Phi(E)|\geqq|\Phi(X_n)|+n+1$$

なる $E\subset X_n$ が存在する．このとき任意の $A\subset X_n$ に対して，

$$\Phi(A)=\Phi(A\frown E)+\Phi(A\frown(X_n-E))$$

だから，

$$|\Phi(A)|\leqq|\Phi(A\frown E)|+|\Phi(A\frown(X_n-E))|\leqq V(E)+V(X_n-E).$$

ここで E を固定して，$A(\subset X_n)$ を変化させたときの上限を考えると，(17. 7) により左辺の上限は ∞ だから，右辺も ∞ でなければならない．従って $V(E)$，$V(X_n-E)$ のうち少なくも一方は ∞ である．よって，$V(E)=\infty$ のときは $X_{n+1}=E$ とすると，$V(X_{n+1})=\infty$であり，(17. 8) により $|\Phi(X_{n+1})|\geqq n+1$ である．また $V(X_n-E)=\infty$ のときは $X_{n+1}=X_n-E$ とすると，$V(X_{n+1})=\infty$ であり，

$$|\Phi(X_{n+1})|=|\Phi(X_n-E)|=|\Phi(X_n)-\Phi(E)|$$
$$\geqq|\Phi(E)|-|\Phi(X_n)|\geqq n+1 \qquad ((17.\ 8)\ により).$$

こうして (17. 6) を満たす集合列 $\{X_n\}$ が作られる.

定理 17. 3. $\bar{V}(E)$, $\underline{V}(E)$, $V(E)$ の値はすべて有限である.

証明. $\bar{V}(E)$, $\underline{V}(E)$, $V(E)$ の定義により, $V(X)<\infty$ なることを示せば十分である. 今 $V(X)=\infty$ と仮定すると, 上の補助定理に述べたような集合列 $\{X_n\}$ が存在する. $\{X_n\}$ は単調減少だから $E=\lim X_n$ が存在し, 定理 17. 1 と (17. 6) により

$$|\Phi(E)|=\lim_{n\to\infty}|\Phi(X_n)|=\infty.$$

集合函数 $\Phi(E)$ は各 E に対して有限な値をとるべきだから, 上の結果は不合理である.

系. $\Phi(E)$ は (各集合 E に対して有限であるばかりでなく) X において有界である.

証明. 任意の $E\subset X$ に対して $|\Phi(E)|\leqq V(E)\leqq V(X)<\infty$ である.

定理 17. 4. $\bar{V}(E)$, $\underline{V}(E)$, $V(E)$ は加法的集合函数で, 任意の E に対して

$$\Phi(E)=\bar{V}(E)+\underline{V}(E) \tag{17. 9}$$

が成立する. (この式を **Jordan** (ジョルダン) の分解という.)

証明. (第一段) $\bar{V}(E)$ の完全加法性. $E=\sum_{n=1}^{\infty}E_n$ とする. 任意の $A\subset E$ に対して, $A=\sum_n(A\frown E_n)$ だから

$$\Phi(A)=\sum_n \Phi(A\frown E_n)\leqq\sum_n \bar{V}(E_n).$$

左辺の $\sup_{A\subset E}$ をとり

$$\bar{V}(E)\leqq\sum_n \bar{V}(E_n). \tag{17. 10}$$

また任意の $\varepsilon>0$ をとるとき, 各 n に対して $\bar{V}(E_n)<\infty$ であるから,

$$A_n\subset E_n,\quad \Phi(A_n)>\bar{V}(E_n)-\varepsilon/2^n$$

なる A_n が存在する. このとき, $m\neq n$ なら $A_m\frown A_n=\phi$ で $\sum_n A_n\subset E$ だから,

$$\bar{V}(E)\geqq\Phi(\sum_n A_n)=\sum_n \Phi(A_n)>\sum_n \bar{V}(E_n)-\varepsilon;$$

ここで ε は任意の正数だから

$$\bar{V}(E)\geqq\sum_n \bar{V}(E_n).$$

この式と (17. 10) とから $\bar{V}(E)$ の完全加法性が出る.

(第二段) Jordan の分解式 (17. 9) の証明. 任意の $E(\subset X)$ を固定し, さらに任意の $A\subset E$ をとると, $\Phi(A)+\Phi(E-A)=\Phi(E)$ だから

$$(17.\ 11)\qquad \Phi(A)=\Phi(E)-\Phi(E-A)\begin{cases}\geqq\Phi(E)-\bar{V}(E)\\ \leqq\Phi(E)-\underline{V}(E)\end{cases}$$

最後の二つの不等式は $E-A\subset E$ なることと $\bar{V}(E)$, $\underline{V}(E)$ の定義とからわかる. (17.11) の上の不等式において左辺の $\inf\limits_{A\subset E}$ をとり

$$\underline{V}(E)\geqq\Phi(E)-\bar{V}(E)\ \text{すなわち}\ \bar{V}(E)+\underline{V}(E)\geqq\Phi(E).$$

同じく (17. 11) の下の不等式において左辺の $\sup\limits_{A\subset E}$ をとり

$$\bar{V}(E)\leqq\Phi(E)-\underline{V}(E)\ \text{すなわち}\ \bar{V}(E)+\underline{V}(E)\leqq\Phi(E).$$

この二つの結果から (17. 9) が得られる.

(第三段) $\underline{V}(E)$, $V(E)$ の完全加法性. 第二段により

$$\underline{V}(E)=\Phi(E)-\bar{V}(E)$$

であり, $\Phi(E)$, $\bar{V}(E)$ は有界 (前定理の系) であって完全加法性 (第一段) をもつから $\underline{V}(E)$ も完全加法性をもつ. $\bar{V}(E)$, $\underline{V}(E)$ の符号は (17. 5) により一定だから, $|\bar{V}(E)|$, $|\underline{V}(E)|$ も完全加法性をもつ. 従って $V(E)=\bar{V}(E)+|\underline{V}(E)|$ も同じ性質をもつ.

(証明終)

この定理により $\bar{V}(E)$, $|\underline{V}(E)|$, $V(E)$ はいずれも測度と考えてよい. また Jordan の分解式は

$$\Phi(E)=\bar{V}(E)-|\underline{V}(E)|$$

とも書けるから, 任意の加法的集合函数が二つの単調増加なもの (すなわち測度) の差になる. だから単調増加な加法的集合函数の性質が一般の加法的集合函数に拡張できる. 例えば次の定理は, 定理 17. 2 から容易にわかる.

定理 17. 5. $\Phi(E)$ が加法的集合函数なるとき, 集合列 $\{E_n\}$ に対して $\lim\limits_{n\to\infty}E_n$ が存在すれば

$$\Phi(\lim_{n\to\infty}E_n)=\lim_{n\to\infty}\Phi(E_n).$$

最後に, 前の例で述べたような分解式を証明しよう.

定理 17. 6 (Hahn の分解定理). X の上の加法的集合函数 $\Phi(E)$ に対して

$$A\subset X,\ \underline{V}(A)=0,\ \bar{V}(X-A)=0$$

となる A が存在する.

(これは $E\subset A$ ならば $\Phi(E)\geqq0$, $E\subset X-A$ ならば $\Phi(E)\leqq0$ というのと同じであるから, $\Phi(E)=\Phi(E\frown A)-|\Phi(E\frown(X-A))|$ とすれば前の例に述べた形になる.)

証明. $\bar{V}(X)$ の定義により，各自然数 n に対して

$$\Phi(A_n) \geqq \bar{V}(X) - 1/2^n \tag{17. 12}$$

なる $A_n(\subset X)$ が存在する．このとき Jordan の分解式 (17. 9) により

$$\bar{V}(A_n) + \underline{V}(A_n) = \Phi(A_n) \geqq \bar{V}(X) - 1/2^n$$

だから，

$$\underline{V}(A_n) \geqq \bar{V}(X) - \bar{V}(A_n) - 1/2^n \geqq -1/2^n. \tag{17. 13}$$

また

$$\bar{V}(A_n) \geqq \Phi(A_n) \geqq \bar{V}(X) - 1/2^n = \bar{V}(A_n) + \bar{V}(X - A_n) - 1/2^n$$

だから

$$\bar{V}(X - A_n) \leqq 1/2^n. \tag{17. 14}$$

ここで $A = \varliminf_{n\to\infty} A_n$ とすると，すべての n に対して

$$X - A = \varlimsup_{\nu\to\infty}(X - A_\nu) \subset \bigcup_{\nu=n}^{\infty}(X - A_\nu)$$

であり，$\bar{V}$ は測度の性質をもつから，(17. 14) により

$$\bar{V}(X - A) \leqq \sum_{\nu=n}^{\infty} \bar{V}(X - A_\nu) \leqq 1/2^{n-1}.$$

ここで n は任意であり $\bar{V}(X-A)$ は n には無関係だから $\bar{V}(X-A)=0$ である．また $|\underline{V}(E)|$ も測度の性質をもつから (17. 13) により

$$|\underline{V}(A)| \leqq \varliminf_{n\to\infty} |\underline{V}(A_n)| = 0.$$

（証明終）

最後に，全変動 $V(E)$ の今一つの性質として

定理 17. 7. Φ を加法的集合函数とし，集合 E の任意の分割 $E = E_1 + \cdots + E_n$（有限個）を考えるとき

$$V(E) = \sup \sum_{j=1}^{n} |\Phi(E_j)| \quad \left(\begin{array}{l}\text{右辺は } E \text{ のあらゆる分} \\ \text{割のしかたに対する上限}\end{array}\right) \tag{17. 15}$$

証明. 各 E_j に対して $V(E_j) \geqq |\Phi(E_j)|$ であって，$V(\cdot)$ も加法的集合函数であるから

$$V(E) = \sum_{j=1}^{n} V(E_j) \geqq \sum_{j=1}^{n} |\Phi(E_j)|. \tag{17. 16}$$

また Φ に Hahn の分解定理を適用すると

$$X = A + B, \quad A \frown B = \phi, \quad \underline{V}(A) = 0, \quad \bar{V}(B) = 0 \tag{17. 17}$$

なる A，B が存在する．だから，はじめの集合 E に対して

(17. 18)
$$E_1=E\frown A,\qquad E_2=E\frown B$$

とすると，(17. 17) により

$$V(E)=V(E_1)+V(E_2)=\overline{V}(E_1)+|\underline{V}(E_2)|=|\Phi(E_1)|+|\Phi(E_2)|$$

(すなわち (17. 18) なる分割に対する $|\Phi(E_1)|+|\Phi(E_2)|$ が $V(E)$ と同じ値をとっている). このことと (17. 16) とにより (17. 15) が成立する. (証明終)

実数値加法的集合函数の性質 (17. 15) の拡張として，複素数値加法的集合函数の全変動を次のように定義する. $\Phi(E)$ を複素数値加法的集合函数とするとき，集合 E のあらゆる分割 $E=E_1+\cdots+E_n$ (有限個) を考え，

(17. 15′)
$$V(\Phi;\ E)=\sup\sum_{j=1}^{n}|\Phi(E_j)|$$

とおいて，これを Φ の E における**全変動**と呼び，$V_\Phi(E)$ または $V(E)$ とも書く. この場合にも，$V_\Phi(E)$ がまた加法的集合函数になるのであるが，そのことは次の § の最後に証明する.

問 1. μ を $(X,\ \mathfrak{B})$ の上の測度とし，$f(x)$ を X の上で μ について可積分な函数とすると，$\Phi(E)=\int_E f(x)d\mu(x)$ は加法的集合函数である.

問 2. $\varphi(x)$ が $R^1=(-\infty,\ \infty)$ の上の右連続な有界変動函数ならば，R^1 の上の加法的 $(\mathfrak{B}_1)$ 集合函数 $\Phi(E)$ で，任意の区間 $I=(a,\ b]$ に対して $\Phi(I)=\varphi(b)-\varphi(a)$ となるものが存在する. ($\varphi(x)$ を単調増加函数の差として表わし，§4 例 2 の考え方を使え.)

§18. 絶対連続集合函数と特異集合函数

測度空間 $(X,\ \mathfrak{B},\ \mu)$ を定めておく.*) $\Phi(E)$ を $(X,\ \mathfrak{B})$ の上の加法的集合函数とする. $\Phi(E)$ が X で μ に関して**絶対連続**であるとは，$\mu(E)=0$ なるすべての E に対して $\Phi(E)=0$ となることである.**) また $\Phi(E)$ が X で μ に関して**特異**であるとは，或る $\mu(E_0)=0$ なる集合 E_0 が存在して，すべての $E\subset X-E_0$ に対して $\Phi(E)=0$ となることである；この場合，任意の $E\subset X$ に対して $\Phi(E)=\Phi(E\frown E_0)$ が成立する.

例 1. $f(x)$ が X の上で可積分な函数ならば，その不定積分 (§13)

$$F(E)=\int_E f(x)d\mu(x)$$

---

*) 前§と同様に，集合は特にことわらなくても $\mathfrak{B}$ に属するもののみを考えるものとする.

**) この定義が §13 で説明した絶対連続性と同じであることは 128 頁の定理 18. 2 によってわかる.

は μ に関して絶対連続な加法的集合函数である（前§問1と定理12.2参照）.

例 2. $X=[0, 1]$ の上の Lebesgue 測度を μ とする. E_0 を Cantor 集合（§7）とし, $\Gamma(E)$ を§7の最後に述べた‘Cantor 集合の上にだけ分布している測度’とすると, この $\Gamma(E)$ は μ に関して特異な加法的集合函数である.

例 3. μ を R^N における Lebesgue 測度, $A=\{x_1, x_2, \cdots\}$ を R^N の中の可算集合とし, $\{\alpha_n\}$ を $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|<\infty$ なる実数列とする. 任意の Borel 集合 $E\subset R^N$ に対して

$$\Phi(E)=\sum_{x_n\in E}\alpha_n \qquad \left(\begin{array}{l}\text{右辺は, } x_n\in E \text{ なるようなすべての } n\\ \text{に対する } \alpha_n \text{ を加えることを意味する}\end{array}\right)$$

とおくと, これは μ に関して特異な加法的集合函数である.

注意 1. 例1において $X=R^N$ で μ が Lebesgue 測度の場合, E が一点から成る集合のときは（従って E が高々可算集合ならば）$F(E)=0$ である. 例2においても, 一点から成る集合 E に対して $\Gamma(E)=0$ となることは, Cantor 函数の連続性（§7）からわかる. このような集合函数を R^N における**連続**な集合函数という. これに対して, 例3のように高々可算無限の集合 A が存在して $\Phi(R^N-A)=0$ となるものを, **純粋不連続**な集合函数という. なお R^N においては<u>連続であって</u>Lebesgue 測度に関して絶対連続でないものだけを特異と呼ぶことがある. この意味で特異なものは, 上の三つの例の中では例2だけである. 一般の測度空間では, その測度に関して絶対連続と特異の二つにしか区別されない.

以後, 誤解の恐れがなければ, ‘μ に関して’を省略して単に‘絶対連続’とか‘特異’とか言うことにする.

定理 18. 1. i) $\Phi(E)$ が絶対連続なことは, $\bar{V}_\Phi(E)$ と $\underline{V}_\Phi(E)$ とがともに絶対連続なことと同等である. ii) $\Phi(E)$ が特異なことは, $\bar{V}_\Phi(E)$ と $\underline{V}_\Phi(E)$ とがともに特異なことと同等である.

証明. i) $\Phi(E)$ が絶対連続とする. $\mu(E)=0$ なる任意の E をとると, 任意の $A\subset E$ に対して $\mu(A)\leqq\mu(E)=0$ だから $\Phi(A)=0$. だから

$$\bar{V}_\Phi(E)=\sup_{A\subset E}\Phi(A)=0.$$

同様にして $\underline{V}_\Phi(E)=0$ も証明される. すなわち $\bar{V}_\Phi(E)$ も $\underline{V}_\Phi(E)$ もともに絶対連続である.

ii) もまったく同様な考え方で証明できるから, 読者の演習問題とする.

問 1. 上の定理の ii) を証明せよ.

次の事実（問2）も定義から容易に証明できる.

問 2. Φ, Ψ がともに絶対連続（またはともに特異）ならば，任意の実数 α, β に対して，$F=\alpha\Phi+\beta\Psi$ も絶対連続（または特異）である．

定理 18. 2. $\Phi(E)$ が絶対連続であるための必要十分条件は，任意の $\varepsilon>0$ に対して或る $\delta_\varepsilon>0$ が存在して，$\mu(E)<\delta_\varepsilon$ なるすべての E に対して $|\Phi(E)|<\varepsilon$ となることである．

証明. （必要）帰謬法による．上の条件が成立しないとすると，或る $\varepsilon_0>0$ と集合 E_n $(n=1, 2, \cdots)$ とが存在して，すべての n に対して

$$\mu(E_n)<1/2^n,\quad |\Phi(E_n)|\geqq\varepsilon_0$$

となる．今

$$E_0=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n\equiv\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\nu=n}^{\infty}E_\nu$$

とおくと，すべての n に対して $E_0\subset\bigcup_{\nu=n}^{\infty}E_\nu$ だから

$$\mu(E_0)\leqq\sum_{\nu=n}^{\infty}\mu(E_\nu)\leqq\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}=\frac{1}{2^{n-1}};$$

ここで $\mu(E_0)$ は n に無関係だから $\mu(E_0)=0$ である．従って Φ が絶対連続なことと前の定理によって $\bar{V}_\Phi(E_0)=0$ である．一方定理 17. 4 と 17. 2 により

$$\bar{V}_\Phi(E_0)\geqq\overline{\lim}\,\bar{V}_\Phi(E_n)\geqq\overline{\lim}\,|\Phi(E_n)|\geqq\varepsilon_0$$

となるから，矛盾である．

（十分）E を $\mu(E)=0$ なる集合とする．任意の $\varepsilon>0$ に対して上の条件の δ_ε を考えると，$\mu(E)=0<\delta_\varepsilon$ だから $|\Phi(E)|<\varepsilon$. ここで $\Phi(E)$ の値は ε に無関係だから，$\Phi(E)=0$ である．すなわち Φ は絶対連続である．

定理 18. 3. $\Phi(E)$ が特異であるための必要十分条件は，任意の $\varepsilon>0$ に対して

(18. 1) $$\mu(E)<\varepsilon,\qquad V_\Phi(X-E)<\varepsilon$$

が同時に成立するような集合 E が存在することである．

証明. （必要）$\Phi(E)$ が特異だから，$\mu(E_0)=0$ なる E_0 が存在して，すべての $A\subset X-E_0$ に対して $\Phi(A)=0$ となる．従って $V_\Phi(X-E_0)=0$ であるから，任意の $\varepsilon>0$ に対してこの E_0 をとれば (18. 1) が成立する．

（十分）$\varepsilon=1/2^n$ に対して，条件 (18. 1) により

(18. 2) $$\mu(E_n)<1/2^n,\quad V_\Phi(X-E_n)<1/2^n$$

なる E_n が存在する．$E_0=\overline{\lim}\,E_n$ とすると，前定理の証明におけると同様にして

(18. 3) $$\mu(E_0)=0$$

を得る．しかも $X-E_0=X-\overline{\lim}\,E_n=\underline{\lim}\,(X-E_n)$ であり，$V_\Phi(E)$ は単調増加な加法的集合函数だから，定理 17．2 と (18．2) により

$$V_\Phi(X-E_0)\leqq\underline{\lim}\,V_\Phi(X-E_n)=0.$$

だから任意の $E\subset X-E_0$ に対して $\Phi(E)=0$ である．このことと (18．3) とにより Φ は特異である．(証明終)

次に加法的集合函数に関して最も重要な Radon-Nikodym（ラドン-ニコディム）の定理を述べる．これは，任意の加法的集合函数が絶対連続なものと特異なものとの和になり絶対連続なものは必ず例 1 のように不定積分で表わされるという定理である．この定理の証明には次の仮定が必要である：

(18．4)　$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n,\ \mu(X_n)<\infty\quad(n=1,2,\cdots)$ なる集合列 $\{X_n\}$ が存在する．

まず補助定理を三つ述べるが，はじめの二つの証明は簡単だから読者の演習問題にしておく．

補助定理 1. 条件 (18．4) のもとで，$\Phi(E)$ がどの X_n の上でも絶対連続（またはどの X_n の上でも特異）ならば，X の上で絶対連続（または特異）である．

補助定理 2. $\Phi(E)$ が X の上で絶対連続でしかも特異ならば $\Phi(E)\equiv 0$ である．（ここでは条件 (18．4) は必要でない．）

問 3. 上の二つの補助定理を証明せよ．

補助定理 3. $\mu(X)<\infty$ とし，$\Phi(E)$ は X の上で恒等的に 0 ではなく，すべての $E\subset X$ に対して $\Phi(E)\geqq 0$ とする．この Φ が特異でないならば，或る自然数 n と $\mu(E_n)>0$ なる集合 E_n とが存在して

$$\text{すべての } E\subset E_n \text{ に対して } \Phi(E)\geqq\frac{1}{n}\mu(E)$$

が成立する．

証明. $\mu(X)<\infty$ だから，各自然数 n に対して $\Phi_n(E)=\Phi(E)-\dfrac{1}{n}\mu(E)$ も加法的集合函数である．この Φ_n に Hahn の分解定理（定理 17．6）を適用すると，適当な集合 E_n をとれば

$$(18.\ 5)\qquad\begin{cases}\text{すべての } E\subset E_n \text{ に対して } \Phi(E)\geqq\dfrac{1}{n}\mu(E),\\[2ex]\text{すべての } E\subset X-E_n \text{ に対して } \Phi(E)\leqq\dfrac{1}{n}\mu(E)\end{cases}$$

となる．ここで $\mu(E_n)>0$ なる n が存在することを示せばよい．もしもすべての n に

対して $\mu(E_n)=0$ とすると，$E_0=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ とおけば

(18. 6) $$\mu(E_0)=0.$$

しかも，任意の $E\subset X-E_0$ をとるとき，すべての n に対して $E\subset X-E_n$ だから (18. 5) により

$$0\leqq\Phi(E)\leqq\frac{1}{n}\mu(E)\leqq\frac{1}{n}\mu(X).$$

ここで $\mu(X)<\infty$ であって，$\Phi(E)$ は n に無関係だから $\Phi(E)=0$ である．これと (18.6) とにより Φ は特異集合函数となり，仮定に反する．

定理 18. 4 (**Radon-Nikodym の定理**). 条件 (18. 4) のもとで，$\Phi(E)$ を X の上の加法的集合函数とする．このとき

i) X で絶対連続な集合函数 $F(E)$ と特異な集合函数 $\Psi(E)$ が存在して

$$\Phi(E)=F(E)+\Psi(E)$$

と書ける．(これを **Lebesgue の分解**という.)

ii) Φ の上のような分解は一意的に定まる．

iii) 上の $F(E)$ に対して，X の上で μ-a. e. x に対して定義された可積分な函数 $f(x)$ が存在して

$$F(E)=\int_E f(x)d\mu(x)$$

と表わされる．(この f を F の μ に関する (**Radon-Nikodym の**) **密度函数**ということがある.)

証明. Hahn の分解定理とこの § の問 2 により，$\Phi(E)\geqq 0$ の場合を証明すればよい．また条件 (18. 4) と補助定理 1 により，$\mu(X)<\infty$ として証明すれば十分である．

まず次の条件 (18. 7) を満たす函数 $\varphi(x)$ の全体を $\boldsymbol{F}$ とする：

(18. 7) $\begin{cases} X \text{ の上で } \varphi(x)\geqq 0 \text{ であって } \mu \text{ に関して可積分であり，その不定積分} \\ F_\varphi(E)=\int_E \varphi(x)d\mu(x) \text{ が，すべての } E \text{ に対して } F_\varphi(E)\leqq\Phi(E) \text{ となる．} \end{cases}$

$\boldsymbol{F}$ は空集合ではない．例えば $\varphi_0(x)\equiv 0$ なる函数 $\varphi_0(x)$ は $\boldsymbol{F}$ に属する．よって

(18. 8) $$\alpha=\sup_{\varphi\in\boldsymbol{F}} F_\varphi(X)$$

とおくと，$0\leqq\alpha\leqq\Phi(X)<\infty$ であり，適当な函数列 $\{\varphi_n\}\subset\boldsymbol{F}$ をとって

(18. 9) $$\lim_{n\to\infty} F_{\varphi_n}(X)=\alpha$$

となるようにできる．ここで $f(x)=\sup_{n\geqq 1}\varphi_n(x)$ とおくとき

(18. 10) すべての E に対して $F_f(E) \leqq \Phi(E)$，すなわち $f \in \boldsymbol{F}$

であり，特に

(18. 11) $$F_f(X)=\alpha$$

となることを示そう．まず $f_n(x)=\max\{\varphi_1(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x)\}$ とおくと，任意の $E \subset X$ に対して，E の各点で少なくとも一つの φ_ν $(1 \leqq \nu \leqq n)$ は f_n に等しいから

$$E=\bigcup_{\nu=1}^{n} E(f_n=\varphi_\nu).$$

だから，適当な集合 $E_\nu \subset E(f_n=\varphi_\nu)$ $(\nu=1,\ \cdots,\ n)$ をとって $E=\sum_{\nu=1}^{n} E_\nu$（直和）となるようにすれば

$$\int_E f_n(x)d\mu(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\int_{E_\nu} f_n(x)d\mu(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\int_{E_\nu}\varphi_\nu(x)d\mu(x)$$
$$=\sum_{\nu=1}^{n} F_{\varphi_\nu}(E_\nu) \leqq \sum_{\nu=1}^{n}\Phi(E_\nu)=\Phi(E).$$

一方 $f_n(x)$ は n について単調増加で $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\sup_{n\geqq 1}\varphi_n(x)=f(x)$ だから，定理 13. 2 により

$$F_f(E)=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)d\mu(x) \leqq \Phi(E).$$

これで (18. 10) が示された．従って (18. 8), (18. 9) により

$$\alpha \geqq F_f(X)=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)d\mu(x) \geqq \lim_{n\to\infty}\int_X \varphi_n(x)d\mu(x)=\alpha$$

となり，(18. 11) が成立する．

さて $F_f(E)$ は加法的集合函数だから，

$$\Psi(E)=\Phi(E)-F_f(E)$$

も加法的集合函数であり，(18. 10) により $\Psi(E) \geqq 0$ である．ここで $\Psi(E)$ が恒等的に 0 ではないとすると，$\Psi(E)$ は特異であることを示そう．もしも特異でもないならば，補助定理 3 により自然数 n と $\mu(E_n)>0$ なる集合 E_n とが存在して

(18. 12) すべての $E \subset E_n$ に対して $\Psi(E) \geqq \dfrac{1}{n}\mu(E)$

が成立する．よって

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & (x \in E_n \text{ のとき}) \\ 0 & (x \in X-E_n \text{ のとき})\end{cases}$$

とおくと，$f(x)+g(x)$ は X の上で $\geqq 0$ で可積分であり，任意の $E\subset X$ に対して

$$F_{f+g}(E)=\int_E f(x)d\mu(x)+\int_E g(x)d\mu(x)$$

$$(\sharp)\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=F_f(E)+\frac{1}{n}\mu(E\frown E_n)\leqq F_f(E)+\Psi(E\frown E_n)\qquad ((18.\ 12)\text{ により})$$

$$\leqq F_f(E)+\Psi(E\frown E_n)+\Psi(E\frown E_n{}^c)\qquad (\because \Psi(E\frown E_n{}^c)\geqq 0)$$

$$=F_f(E)+\Psi(E)=\Phi(E).$$

だから $f+g\in \boldsymbol{F}$ である．ところが，(♯) と同様にして

$$F_{f+g}(X)=F_f(X)+\frac{1}{n}\mu(E_n)>F_f(X)=\alpha\qquad (\because \mu(E_n)>0).$$

これは α の定義 (18. 8) に反する．だから $\Psi(E)$ が恒等的に 0 ではないならば Ψ は特異である．以上により，$F(E)=F_f(E)$ とすれば定理の i) と iii) が得られる．

次に ii) を証明する．もしも

$$\begin{cases}\Phi(E)=F_1(E)+\Psi_1(E)=F_2(E)+\Psi_2(E);\\ F_1,\ F_2\ \text{は絶対連続};\ \Psi_1,\ \Psi_2\ \text{は特異}\end{cases}$$

となったとすると，

$$F_1(E)-F_2(E)=\Psi_2(E)-\Psi_1(E);$$

ここで左辺は絶対連続，右辺は特異である（問 2 ）から，補助定理 2 により両辺とも恒等的に 0 である．すなわち $F_1\equiv F_2$, $\Psi_1\equiv \Psi_2$ となり ii) が示された．（証明終）

注意 2. $f_1(x)=f_2(x)$ (μ-a. e.) で $f_1(x)$, $f_2(x)$ の一方が X の上で可積分ならば，他方も可積分であって，任意の $E\subset X$ に対して $\int_E f_1(x)d\mu(x)=\int_E f_2(x)d\mu(x)$ となるから，上の定理の密度函数 $f(x)$ の値は μ-a. e. x に対して確定する．

注意 3. $\Phi(E)$ が X の上の測度（すなわち負の値をとらないが ∞ になることもある）の場合も，$X=\bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k$, $\Phi(Y_k)<\infty$, なる集合列 $\{Y_k\}$ が存在するならば，これが μ に関して絶対連続あるいは特異という概念は上に述べたとおりに定義できるから，Radon-Nikodym の定理が成立する——条件 (18. 4) における $\{X_n\}$ をとって各 $X_n\frown Y_k$ ($n, k=1, 2, \cdots$) の上で考えればよい．ただし，その場合の密度函数は，各 Y_k の上で可積分であるが，X 全体での積分は $\Phi(X)(\leqq\infty)$ になる．このことは実際に応用される．

注意 4. 条件 (18. 4) が満たされないときは，Radon-Nikodym の定理は必ずしも成立しない．（次の反例あり．）

反例． $X=[0, 1]$ とし，$\mathfrak{B}$ をその中の普通の Borel 集合の全体とする．また測度 μ を次のように定義する：

$$\mu(E)=\begin{cases}\infty & (E\ \text{が無限集合のとき}) \\ n & (E\ \text{が}\ n\ \text{個の点から成る集合のとき}).\end{cases}$$

この場合，$\mu(E)=0$ となるのは E が空集合のときだけである．だから $\Gamma(E)$ を普通の (R^1 における) Lebesgue 測度とすると，$\mu(E)=0$ ならば $\Gamma(E)=0$，すなわち Γ は μ に関して絶対連続である．ここで，もしも Radon-Nikodym の定理が成立するならば，$X=[0, 1]$ の上で μ に関して可積分な函数 $f(x)$ が存在して

$$\Gamma(E)=\int_E f(x)d\mu(x) \tag{18. 13}$$

となる．このときまず，X の上で $f(x)\geqq 0$ となることを示そう．もしも $f(x)<0$ なる点があれば，μ の定義により $\mu(X(f<0))>0$ であるが，

$$X(f<0)=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n,\quad X_n=X\left(f<-\frac{1}{n}\right)$$

と書けるから，$\mu(X_n)>0$ なる n が存在する．従って

$$\Gamma(X_n)=\int_{X_n}f(x)d\mu(x)\leqq -\frac{1}{n}\mu(X_n)<0$$

となり不合理である．だから X の上でいつも $f(x)\geqq 0$ である．次に $E_0=X(f>0)$ とおくと

$$E_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,\quad E_n=X\left(f>\frac{1}{n}\right)$$

と書ける．このとき $X-E_0=X(f=0)$ だから

$$\Gamma(X-E_0)=\int_{X-E_0}f(x)d\mu(x)=0.$$

従って $\Gamma(E_0)=\Gamma(X)=1$ となり，E_0 は可算集合ではない．だから少なくも一つの E_n は有限集合ではない．この E_n に対しては，$\mu(E_n)=\infty$ だから

$$1\geqq\Gamma(E_n)=\int_{E_n}f(x)d\mu(x)\geqq\frac{1}{n}\mu(E_n)=\infty$$

となり不合理である．以上により (18. 13) が成立するような $f(x)$ は存在しない．

最後に，$(X,\ \mathfrak{B})$ の上の複素数値加法的集合函数 $\Phi(E)$ の全変動：

$$V_\Phi(E)=\sup\sum_{j=1}^{n}|\Phi(E_j)|\qquad \left(\begin{array}{l}\text{右辺は}\ E=E_1+\cdots+E_n\ \text{なる分割}\\ \text{のあらゆるしかたに対する上限}\end{array}\right)$$

が，また加法的集合函数になることを示そう．$\Re\Phi(E)$，$\Im\Phi(E)$ は実数値加法的集合函数であるから，定理 17. 4 により，

$$\mu(E)=V(\Re\Phi;\ E)+V(\Im\Phi;\ E)$$

なる μ は $(X,\ \mathfrak{B})$ の上の測度であって $\mu(X)<\infty$ である．そして $\mu(E)=0$ ならば $\Phi(E)=0$ であるから，Radon-Nikodym の定理により

$$\Phi(E)=\int_E\varphi(x)d\mu(x)$$

となるような，μ に関して可積分な函数 $\varphi(x)$ が存在する．だから $V_\Phi(E)$ の定義により

$$V_\Phi(E)=\int_E|\varphi(x)|d\mu(x) \qquad (\S 12,\ 問 6 参照).$$

すなわち $V_\Phi(E)$ も不定積分の形に書けるから，加法的集合函数である．

問 4. 可測空間 $(X,\ \mathfrak{B})$ の上に二つの測度 μ_1, μ_2 が定義されていて，おのおのが (18.4) の形の条件を満たすとする．そのとき，i) μ_2 が μ_1 に関して絶対連続で，その密度函数 $f(x)$ が μ_1-a. e. x に対して正の値をとるならば，μ_1 はまた μ_2 に関して絶対連続であって，その密度函数としては $1/f(x)$ をとれる．ii) μ_1 と μ_2 とが互いに他方に関して絶対連続であるとき，μ_1 の μ_2 に関する密度函数を $f_{12}(x)$, μ_2 の μ_1 に関する密度函数を $f_{21}(x)$ とすると，$f_{12}(x)f_{21}(x)=1$ (μ_j-a. e.)．従って $f_{12}(x)>0$, $f_{21}(x)>0$ (μ_j-a. e.) である．(μ_1 または μ_2 の一方について成立すれば，仮定によって他方についても成立する．)

問 5. μ を $(R^N,\ \mathfrak{B}_N)$ の上の Lebesgue 測度，Φ を $(R^N,\ \mathfrak{B}_N)$ の上の加法的集合函数（または注意 3 の条件を満たす測度）とすると，$\Phi=\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3$, ここに Φ_1 は μ に関して絶対連続な加法的集合函数，Φ_2 は連続であって μ に関して特異な加法的集合函数，Φ_3 は純粋不連続な加法的集合函数，と一意的に分解される．(R^N の上の加法的集合函数の場合には，この分解を **Lebesgue の分解**ということもある．)

§19. 直線上の絶対連続函数

$F(x)$ を有限閉区間 $[a,\ b]$ で定義された有界な実数値函数とする．この函数 $F(x)$ が**絶対連続**であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta_\varepsilon>0$ が存在して，$[a,\ b]$ に含まれてどの二つも交わらないような区間の有限列 $\{(a_\nu,\ b_\nu];\ \nu=1,\ \cdots,\ n\}$ が

$$\sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu-a_\nu)<\delta_\varepsilon$$

を満たすかぎりいつも

$$\sum_{\nu=1}^{n}|F(b_\nu)-F(a_\nu)|<\varepsilon$$

となることである．絶対連続函数は明らかに連続である．(上の定義において一つの区間 $(a_1,\ b_1]$ の場合を考えればよい．) また

定理 19. 1. $[a,\ b]$ で絶対連続な函数 $F(x)$ は有界変動*) である．すなわち，或る定数 M が存在して，$[a,\ b]$ の任意の分割

(△)　　$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{k-1}<x_k=b$

*) 有界変分ともいう．この § と次の § とで使う有界変動函数の性質については，例えば一松 信，解析学序説（裳華房）上巻，245—248 頁を参照．

に対して

$$\sum_{j=1}^{k}|F(x_j)-F(x_{j-1})|\leqq M$$

となる.

証明. $F(x)$ の絶対連続性の定義における $\varepsilon=1$ に対応する δ_1 を一つとって固定し,

$$M=\frac{b-a}{\delta_1}+1$$

とおく. また n を

$$\frac{b-a}{\delta_1}<n\leqq\frac{b-a}{\delta_1}+1(=M) \tag{19. 1}$$

なる自然数とし, $[a,\ b]$ を n 等分する分割を

$$a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n=b \tag{Δ_1}$$

とする. さて定理に述べた任意の分割Δに対して, ΔとΔ_1 とを合併した分割を

$$a=\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{l-1}<\alpha_l<=b$$

とする. このとき, $a_{\nu-1}<\alpha_\lambda\leqq a_\nu$ なるすべての λ について加えることを $\sum\limits_{a_{\nu-1}<\alpha_\lambda\leqq a_\nu}^{(\lambda)}$ と書くことにすると, (19. 1) により

$$\sum_{a_{\nu-1}<\alpha_\lambda\leqq a_\nu}^{(\lambda)}|\alpha_\lambda-\alpha_{\lambda-1}|=a_\nu-a_{\nu-1}=\frac{b-a}{n}<\delta_1$$

だから, δ_1 のとり方により

$$\sum_{a_{\nu-1}<\alpha_\lambda\leqq a_\nu}^{(\lambda)}|F(\alpha_\lambda)-F(\alpha_{\lambda-1})|<1.$$

だから

$$\sum_{j=1}^{k}|F(x_j)-F(x_{j-1})|\leqq\sum_{\lambda=1}^{l}|F(\alpha_\lambda)-F(\alpha_{\lambda-1})|$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{a_{\nu-1}<\alpha_\lambda\leqq a_\nu}^{(\lambda)}|F(\alpha_\lambda)-F(\alpha_{\lambda-1})|<n\leqq M.$$

(証明終)

絶対連続性の定義における区間の有限列を可算無限列でおきかえてよいことは容易にわかる. すなわち, $F(x)$ が絶対連続ならば, 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta_\varepsilon>0$ が存在して, $[a,\ b]$ に含まれてどの二つも交わらないような区間の可算列 $\{(a_\nu,\ b_\nu];\ \nu=1,\ 2,\ \cdots\}$ が

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(b_\nu-a_\nu)<\delta_\varepsilon \tag{19. 2}$$

を満たすかぎりいつも

(19. 3)
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |F(b_\nu)-F(a_\nu)|<\varepsilon$$

となる．逆に $F(x)$ がこの性質を持てば，最初に定義した意味で絶対連続なことは明らかである．

次に $F(x)$ を $[a, b]$ で有界変動で右連続な任意の函数（絶対連続とはかぎらない）とすると，$F(x)$ は $[a, b]$ で右連続な二つの単調増加函数 $F_1(x)$, $F_2(x)$ の差として表わされる：

(19. 4)
$$F(x)=F_1(x)-F_2(x).$$

そして

(19. 5)
$$V_F(x)=F_1(x)+F_2(x)$$

は $F(x)$ の全変動と呼ばれる．この $V_F(x)$ も $[a, b]$ で右連続な単調増加函数である．このとき絶対連続性の定義から明らかに，

補助定理 1. 次の三つの条件は同等である：

i) $F(x)$ が絶対連続である，

ii) $F_1(x)$, $F_2(x)$ がともに絶対連続である，

iii) $V_F(x)$ が絶対連続である．

よって，今後しばらく（次の補助定理2の証明が終るまで）$F(x)$ を $[a, b]$ で右連続な単調増加函数として話を進める．この $F(x)$ から，§5 — §6 で述べたようにして $(a, b]$ の上の測度を構成できる．すなわち，任意の集合 $A\subset(a, b]$ に対して

(19. 6)
$$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,\ b_n]$$

と可算個の区間 $\{(a_n, b_n];\ n=1, 2, \cdots\}$ で A を掩い

(19. 7)
$$\Phi^*(A)=\inf\sum_{n=1}^{\infty}\{F(b_n)-F(a_n)\}\quad\left(\begin{array}{l}\text{inf は (19. 6) のような}\\ \text{すべての掩い方に対する下限}\end{array}\right)$$

とすると．Φ^* は外測度になり，Φ^* について可測（§5）な集合の全体 $\mathfrak{M}_\Phi$ は σ-加法族をなし，$(a, b]$ の中の普通の（R^1 で考えた）Borel 集合の全体 $\mathfrak{B}_1(a, b]$ を含む．そして Φ^* を $\mathfrak{M}_\Phi$ の上で考えたものを Φ とすると，Φ は $\mathfrak{M}_\Phi$ の上の測度である．このとき A を (19. 6) のように掩う掩い方としては，区間 $(a_n, b_n]$ $(n=1, 2, \cdots)$ がどの二つも交わらない場合だけ考えればよい．その理由は次のとおりである．(19. 6) のような任意の掩い方に対して

$$K_n=(a_n,\ b_n]-\bigcup_{\nu=1}^{n-1}(a_\nu,\ b_\nu]$$

は有限個の区間の直和であり（‘区間’はその右端の点を含み左端の点を含まないことによる），

$$K_n=I_{n1}+\cdots+I_{nk_n} \qquad (\text{各 } I_{nj} \text{ は区間})$$

とすると，$\{I_{nj};\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ k_n;\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ はどの二つも交わらない．これらの区間の番号をつけかえて一列に並べたものを $\{(a_\nu',\ b_\nu'];\ \nu=1,\ 2,\ \cdots\}$ とすると

$$(19.\ 6') \qquad A\subset\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu',\ b_\nu']=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,\ b_n]$$

である．そして各 $(a_n,\ b_n]$ は有限個の $(a_\nu',\ b_\nu']$ の直和だから，

$$(19.\ 7') \qquad \Phi^*(A)\leqq\sum_{\nu=1}^{\infty}\{F(b_\nu')-F(a_\nu')\}\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\{F(b_n)-F(a_n)\}.$$

従って，たがいに交わらない区間 $(a_\nu,\ b_\nu]$ で A を掩ったものだけについて (19. 7) で $\Phi^*(A)$ を定義しても同じ値を得る．以上のことは $(a,\ b]$ の上の普通の（R^1 で考えた）Lebesgue 測度 μ についても全く同様である．なお

$$(19.\ 8) \qquad A=\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu,\ b_\nu] \text{ ならば } A\in\mathfrak{M}_\Phi,\ \Phi(A)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\{F(b_\nu)-F(a_\nu)\}.$$

従って特に $\Phi((a,\ b])=F(b)-F(a)<\infty$ である．

上に述べた $\mathfrak{M}_\Phi$ は $(a,\ b]$ の中の Lebesgue 可測集合の全体 $\mathfrak{M}_\mu(a,\ b]$ と必ずしも一致しない．しかし §7 に述べたように任意の $A\in\mathfrak{M}_\mu(a,\ b]$ は

$$A=B+E, \qquad B\in\mathfrak{B}_1(a,\ b], \qquad \mu(E)=0$$

と表わされ，任意の $A'\in\mathfrak{M}_\Phi$ は

$$A'=B'+E', \qquad B'\in\mathfrak{B}_1(a,\ b], \qquad \Phi(E')=0$$

と表わされる．従って特に，

$$(19.\ 9) \qquad \mu(E)=0 \text{ ならば } \Phi^*(E)=0 \ (\text{従って } E\in\mathfrak{M}_\Phi)$$

が成立する場合は，$\mathfrak{M}_\Phi\supset\mathfrak{M}_\mu$ であって任意の $A'\in\mathfrak{M}_\Phi$ は

$$(19.\ 10) \qquad A'=A+E, \qquad A\in\mathfrak{M}_\mu, \qquad \Phi(E)=0$$

とも書ける．(19. 9) が成立する場合に Φ は Lebesgue 測度 μ に関して**絶対連続**であるという．（$\mathfrak{M}_\Phi$ と $\mathfrak{M}_\mu$ とが一致しないから，この定義は前の§で述べた絶対連続性の定義には含まれない．）ここで次の補助定理を証明しよう．

補助定理 2. $F(x)$, $\Phi(E)$ を上に述べたとおりとするとき，$F(x)$ が（この§の最初に述べた意味で）絶対連続であるための必要十分条件は，Φ が Lebesgue 測度 μ に関して絶対連続なことである．

証明．（必要） $F(x)$ が絶対連続であるとし，E を $\mu(E)=0$ なる任意の集合とする．

任意の $\varepsilon>0$ に対して，(19. 2) から (19. 3) が出るような δ_ε をとると，前の頁で注意したことにより

$$E\subset\sum_{n=1}^{\infty}(a_n,\ b_n],\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)<\delta_\varepsilon$$

なる可算個の区間 $(a_n,\ b_n]$ $(n=1, 2, \cdots)$ をどの二つも互いに交わらないようにとれる．だから Φ の定義により

$$0\leqq\Phi(E)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\{F(b_n)-F(a_n)\}<\varepsilon;$$

ε は任意の正数だから $\Phi(E)=0$ である．すなわち Φ は μ に関して絶対連続である．

（十分） Φ が μ に関して絶対連続とする．任意の $\varepsilon>0$ に対して，Φ について定理 18. 2 の条件が成立するような δ_ε をとる.*) $(a,\ b]$ に含まれてどの二つも交わらない区間の有限列 $\{(a_\nu,\ b_\nu];\ \nu=1, 2, \cdots, n\}$ が

$$\sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu-a_\nu)<\delta_\varepsilon$$

を満たすとすると，集合 $E=\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu,\ b_\nu]$ は $\mu(E)<\delta_\varepsilon$ であるから，$\Phi(E)<\varepsilon$ となる．だから (19. 8) により

$$\sum_{\nu=1}^{n}\{F(b_\nu)-F(a_\nu)\}<\varepsilon.$$

よって $F(x)$ は絶対連続である．（証明終）

ここで再び $F(x)$ を $[a,b]$ の上の右連続な有界変動函数とする．$F(x)$ は (19. 4) のように二つの右連続な有界単調増加函数 $F_1(x)$, $F_2(x)$ の差になる．$F_1(x)$, $F_2(x)$ から上に述べた方法でそれぞれ σ-加法族 $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ とそれらの上の測度 Φ_1, Φ_2 を作り，

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\frown\mathfrak{M}_2$$

とおくと，$\mathfrak{M}$ も σ-加法族であって $\mathfrak{B}_1(a,\ b]$ を含む．任意の $E\in\mathfrak{M}$ に対して

(19. 11) $$\Phi(E)=\Phi_1(E)-\Phi_2(E)$$

と定義すると，Φ は $\mathfrak{M}$ の上の加法的集合函数であって (19. 8) が成立する（このことは，Φ_1, Φ_2 に対して (19. 8) が成立することと，(19. 4), (19. 11) によりわかる）．また補助定理 2 が F_1 と Φ_1, F_2 と Φ_2 に対して成立するから，補助定理 1 と (19. 11) により，ここの F と Φ に対しても補助定理 2 が成立する．このことから次の定理が証

*) ここでの絶対連続の意味は前の§のそれと少し違うけれども，(19.10) が成立しているから，$\mathfrak{M}_\mu$ を定理 18. 2 の $\mathfrak{B}$ と考えてその定理を使える．このことは次の頁の定理 19. 2 の証明で Radon-Nikodym の定理を使う場合も同様である．

明される.

定理 19. 2. 区間 $[a,\ b]$ で定義された有界な函数 $F(x)$ が絶対連続であるための必要十分条件は, $(a,\ b]$ で Lebesgue 積分可能な函数 $f(x)$ が存在して

$$F(x)-F(a)=\int_a^x f(y)d\mu(y) \qquad (\mu \text{ は Lebesgue 測度}) \tag{19. 12}$$

が成立することである.

証明. (必要) $F(x)$ が絶対連続とする. $F(x)$ から上に述べた方法で加法的集合函数 $\Phi(E)$ を作ると

$$F(x)-F(a)=\Phi((a,\ x]) \tag{19. 13}$$

が成立する. 補助定理 2 (が任意の有界変動函数 F について成立すること) により, $\Phi(E)$ は μ について絶対連続だから, Radon-Nikodym の定理 18. 4 により*) $(a,\ b]$ で Lebesgue 積分可能な函数 $f(x)$ があって, 任意の $E\in\mathfrak{M}_\mu$ に対して

$$\Phi(E)=\int_E f(y)d\mu(y) \tag{19. 14}$$

が成立する. 特に $E=(a,\ x]$ とおけば (19. 13) と合わせて (19. 12) を得る.

(十分) $F(x)$ に対して (19. 12) が成立すれば, (19. 14) で定義される $\Phi(E)$ は μ に関して絶対連続な集合函数であって (19. 8) が成立する. だから補助定理 2 の証明の後半 (十分なことの証明) と同様にして, $F(x)$ が絶対連続なことがわかる. (証明終)

一般の有界変動函数 $F(x)$ の場合には, 対応する $\Phi(E)$ を $\mathfrak{B}_1(a,\ b]$ の上で考えると, Radon-Nikodym の定理によって

$$\Phi(E)=\int_E f(y)d\mu(y)+\Psi(E), \qquad \Psi(E) \text{ は特異集合函数}$$

と書けるから, $E=(a,\ x]$ とおき, $G(x)=\Psi((a,\ x])$ とすると

$$F(x)-F(a)=\int_a^x f(y)d\mu(y)+G(x) \tag{19. 15}$$

となる. ここで $G(x)$ は, 例えば Cantor 函数 (§7) のように, Lebesgue 測度 0 の集合の上だけで増加する函数である.

最後に積分法と微分法との関係を与える定理として

定理 19. 3. 区間 $[a,\ b]$ で $F(x)$ が絶対連続, 従って (19. 12) が成立している, とすると, μ-a. e. $x\in[a,\ b]$ に対して有限な極限値

---

*) 前の頁の脚注参照.

(19. 16)
$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

が存在して $f(x)$ に等しい.

この意味で $f(x)$ を $F(x)$ の**微分商**とも呼ぶ（前には (19. 14) の意味で Φ の密度函数と呼んだ).

この定理を証明するために，少し準備をする．$0<a<b<1$ として一般性を失わないから以後そのように仮定し，また $\Phi(E)$ を

(19. 14′)
$$\Phi(E)=\int_E f(x)d\mu(x)$$

で定義される絶対連続集合函数とする．以後 ‘Lebesgue 可測’ のかわりに単に ‘可測’ と呼ぶ．まず

$$I=\left(\frac{k-1}{3^n},\ \frac{k}{3^n}\right]\qquad(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 3^n)$$

なる形のすべての区間 I の集まり(集合族)を $\boldsymbol{I}_n$ とし,

$$J=\left(\frac{2k-1}{2\cdot 3^n},\ \frac{2k+1}{2\cdot 3^n}\right]\qquad(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 3^n)$$

なる形のすべての区間 J の集まりを $\boldsymbol{J}_n$ として,

$$\boldsymbol{I}=\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{I}_n,\qquad \boldsymbol{J}=\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{J}_n\qquad(\text{集合族としての合併})$$

とおく.（各 n について，$\boldsymbol{I}_n$ に属する区間をその区間の長さの半分だけ平行移動すると $\boldsymbol{J}_n$ に属する区間になる.）任意の点 $x\in[a,\ b]$ と任意の n に対して

$$\begin{cases}x\in I \text{ なる } I\in\boldsymbol{I}_n \text{ が必ずただ一つあるから，それを } I_n(x) \text{ とし,}\\ x\in J \text{ なる } J\in\boldsymbol{J}_n \text{ が必ずただ一つあるから，それを } J_n(x) \text{ とする.}\end{cases}$$

そして

$$\bar{D}_I\Phi(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\Phi(I_n(x))}{\mu(I_n(x))},\quad \bar{D}_J\Phi(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\Phi(J_n(x))}{\mu(J_n(x))}$$

と定義する．このとき

補助定理 3. $\bar{D}_I\Phi$, $\bar{D}_J\Phi$ は可測函数である.

証明. $I_n(x)$ の定義により，函数 $f_n(x)=\Phi(I_n(x))/\mu(I_n(x))$ は

$$x\in\left(\frac{k-1}{3^n},\ \frac{k}{3^n}\right] \text{ ならば } f_n(x)=3^n\Phi\left(\left(\frac{k-1}{3^n},\ \frac{k}{3^n}\right]\right)$$

なる単函数であるから可測である．そして $\bar{D}_I\Phi(x)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n(x)$ であるから $\bar{D}_I\Phi(x)$ は可測函数である．$\bar{D}_J\Phi(x)$ についても同様に証明される.

補助定理 4. G は有界な開集合，E は G に含まれる可測集合とする．$\boldsymbol{I}_0$ が $\boldsymbol{I}$ の部分列であって

$$E\subset\bigcup_{I\in\boldsymbol{I}_0} I\subset G$$

を満たすならば，$\boldsymbol{I}_0$ の適当な部分列 $\{I_m\}$（有限または可算列）で

(19. 17) $$I_m\cap I_n=\phi\quad(m\neq n),\quad E\subset\sum_{m=1}^{\infty}I_m\subset G$$

なるものが存在する．

証明． 各点 $x\in E$ に対して，x を含む $I_n\in\boldsymbol{I}_0$ が存在するから，その中で最大のものを I_x とする．このとき任意の $x,\ y\in E$ に対して，I_x と I_y とは交わらないかまたは一致することを示そう．$\boldsymbol{I}$ の定義により，一般に $I,\ I'\in\boldsymbol{I}$ ならば I と I' とは交わらないかまたは一方が他方を含む．だから，I_x と I_y とが交わる場合には例えば $I_x\subset I_y$ とすると，$x\in I_y$ だから I_x の定義（最大のものということ）によって $I_x\supset I_y$ となり，$I_x=I_y$ でなければならない．よって $\{I_x;\ x\in E\}$ のうちで相異なるもの全体を $\{I_1,\ I_2,\ \cdots\}$ とすればよい．

補助定理 5. E が有界な可測集合で $\mu(E)>0$ とするとき，E の上で $\bar{D}_I\Phi(x)>0$ ならば $\Phi(E)>0$ である．

証明． 第一段．まず仮定から $\Phi(E)\geqq 0$ を証明する．E を含む任意の有界な開集合 G をとるとき，任意の $x\in E$ に対して仮定により

$$I_n(x)\subset G,\qquad \Phi(I_n(x))>0$$

なる $I_n(x)$ が存在する．x が E を動くときの，上のような $I_n(x)$ の全体を $\boldsymbol{I}_0$ とすると，$\boldsymbol{I}_0$ は補助定理 4 の条件を満たすから，$\boldsymbol{I}_0$ の部分列 $\{I_m\}$ で (19. 17) を満たすものが存在する．よって $I_G=\sum_{m=1}^{\infty}I_m$ とおくと

(19. 18) $$\Phi(I_G)=\sum_{m=1}^{\infty}\Phi(I_m)>0.$$

さて任意の自然数 ν に対して

$$G_\nu\supset E,\qquad \mu(G_\nu-E)<1/\nu$$

なる有界な開集合 G_ν が存在する．これに対して I_{G_ν} を（上の I_G のように）作ると

$$G_\nu\supset I_{G_\nu}\supset E,\ \text{従って}\ \mu(I_{G_\nu}-E)<1/\nu\to 0\ (\nu\to\infty).$$

$\Phi(E)$ は絶対連続集合函数だから

$$\Phi(I_{G_\nu})-\Phi(E)=\Phi(I_{G_\nu}-E)\to 0\ (\nu\to\infty).$$

そして (19. 18) と同様に $\Phi(I_{G\nu})>0$ だから，$\Phi(E)\geqq 0$ である．

第二段．$\Phi(E)>0$ の証明．$\varepsilon>0$ に対して $E_\varepsilon=E(\bar{D}_I\Phi>\varepsilon)$ とおく．仮定によって $\mu(E_\varepsilon)>0$ なる $\varepsilon>0$ が存在する．このような ε を一つ固定して

$$\Phi_\varepsilon(A)=\Phi(A)-\varepsilon\mu(A\frown E_\varepsilon)$$

とおくと，Φ_ε は絶対連続集合函数で，$x\in E_\varepsilon$ ならば

$$\bar{D}_I\Phi_\varepsilon(x)\geqq\bar{D}_I\Phi(x)-\varepsilon>0.$$

だから第一段により $\Phi_\varepsilon(E_\varepsilon)\geqq 0$，すなわち $\Phi(E_\varepsilon)\geqq\varepsilon\mu(E_\varepsilon)>0$．一方 $E-E_\varepsilon$ に第一段の結果を適用して $\Phi(E-E_\varepsilon)\geqq 0$ だから，

$$\Phi(E)=\Phi(E_\varepsilon)+\Phi(E-E_\varepsilon)>0.$$

補助定理 6. $[a,\ b]$ において $\Phi\geqq 0$ とし，$E\subset[a,\ b]$ を可測集合とする．E に含まれる任意の可測集合 A に対して $\Phi(A)=0$ ならば，ほとんどすべての $x\in E$ に対して

$$\bar{D}_I\Phi(x)=0,\qquad \bar{D}_J\Phi(x)=0.$$

証明． 仮定 $\Phi\geqq 0$ により $\bar{D}_I\Phi\geqq 0$ である．$E_0=E(\bar{D}_I\Phi>0)$ とおくとき $\mu(E_0)>0$ とすると，補助定理 5 によって $\Phi(E_0)>0$ となって仮定に反するから，$\mu(E_0)=0$ である．補助定理 4 および 5 は $\boldsymbol{J}$, $\bar{D}_J\Phi$ に対しても成立するから，前と同様にして $\mu(E(\bar{D}_J\Phi>0))=0$ である．よってこの補助定理 6 が成立する．

補助定理 7. 上の補助定理と同じ仮定のもとでは，ほとんどすべての $x\in E$ に対して

$$\lim_{h\to+0}\frac{\Phi((x,\ x+h])}{h}=0,\ \lim_{h\to+0}\frac{\Phi((x-h,\ x])}{h}=0. \tag{19. 19}$$

証明． 任意の $h>0$ に対して $(2\cdot 3^{n+1})^{-1}<h\leqq(2\cdot 3^n)^{-1}$ なる n が存在する．この n に対して k を適当にとれば，区間

$$\left(\frac{k-1}{3^n},\ \frac{k}{3^n}\right],\qquad \left(\frac{2k-1}{2\cdot 3^n},\ \frac{2k+1}{2\cdot 3^n}\right]$$

の少くも一方は区間 $(x,\ x+h]$ を含む；すなわち $I_n(x)$, $J_n(x)$ の少なくも一方は区間 $(x,\ x+h]$ を含む．そして n のとり方により

$$6h>3^{-n}=\mu(I_n(x))=\mu(J_n(x)) \tag{19. 20}$$

だから

$$\frac{\Phi((x,\ x+h])}{6h}\leqq\max\left\{\frac{\Phi(I_n(x))}{\mu(I_n(x))},\ \frac{\Phi(J_n(x))}{\mu(J_n(x))}\right\}. \tag{19. 21}$$

また (19. 20) により，$h\to 0$ のとき $n\to\infty$ となるから，補助定理 6 により (19. 21) の右辺は 0 に近づく．従って

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\frac{\Phi((x,\ x+h])}{h}=0.$$

一方仮定 $\Phi\geqq 0$ により $\Phi((x,\ x+h])/h\geqq 0$ だから，(19. 19) の第一の式が得られる．第二の式も同様にして証明できる．

系． 任意の可測集合 $E\subset[a,\ b]$ を固定するとき，ほとんどすべての $x\in E$ に対して

$$(19.\ 22)\qquad \lim_{h\to+0}\frac{\mu((x,\ x+h]\cap E)}{h}=1,\quad \lim_{h\to+0}\frac{\mu((x-h,\ x]\cap E)}{h}=1.$$

証明． $\Phi_1(A)=\mu(A\cap E^c)$ は補助定理 6 の仮定を満たすから補助定理 7 により

$$\varlimsup_{h\to+0}\frac{\mu((x,\ x+h]\cap E^c)}{h}=0\qquad (\text{a. e. } x\in E).$$

ところが

$$\frac{\mu((x,\ x+h]\cap E)}{h}+\frac{\mu((x,\ x+h]\cap E^c)}{h}=\frac{\mu((x,\ x+h])}{h}=1.$$

だから

$$\varliminf_{h\to+0}\frac{\mu((x,\ x+h]\cap E)}{h}=1\qquad (\text{a. e. } x\in E).$$

一方任意の $h>0$ に対して $\mu((x,\ x+h]\cap E)/h\leqq 1$ だから，上の式と合せて，(19. 22) の第一の式がほとんどすべての $x\in E$ に対して成立することがわかる．(19. 22) の第二の式も (19. 19) の第二の式を使って同様に証明される．

定理 19. 3 の証明． (19. 12) において $f(x)\geqq 0$ の場合を証明すればよい；従って (19. 14′) により $\Phi(E)\geqq 0$ である．また $f(x)$ は Lebesgue 積分可能だから，すべての x に対して $f(x)<\infty$ としてよい．$0\leqq\alpha<\beta$ なる任意の有理数 $\alpha,\ \beta$ に対して

$$E_{\alpha\beta}=(a,\ b]\cap\{x;\ \alpha\leqq f(x)\leqq\beta\}$$

とおくと，(19. 14′) により任意の $h>0$ に対して

$$\alpha\cdot\mu((x,\ x+h]\cap E_{\alpha\beta})\leqq\Phi((x,\ x+h]\cap E_{\alpha\beta})\leqq\beta\cdot\mu((x,\ x+h]\cap E_{\alpha\beta}).$$

だから

$$\alpha\cdot\frac{\mu((x,\ x+h]\cap E_{\alpha\beta})}{h}\leqq\frac{\Phi((x,\ x+h]\cap E_{\alpha\beta})}{h}\leqq\frac{\Phi((x,\ x+h]\cap E_{\alpha\beta})}{\mu((x,\ x+h]\cap E_{\alpha\beta})}\leqq\beta$$

(第二の $\leqq$ は $h=\mu((x,\ x+h])\geqq\mu((x,\ x+h]\cap E_{\alpha\beta})$ による)．ここで $h\to+0$ のとき，一ばん左の辺に補助定理 7 の系を適用すれば，

$$\alpha\leqq\varliminf_{h\to+0}\frac{\Phi((x,\ x+h]\cap E_{\alpha\beta})}{h}\leqq\varlimsup_{h\to+0}\frac{\Phi((x,\ x+h]\cap E_{\alpha\beta})}{h}\leqq\beta$$

が a. e. $x\in E_{\alpha\beta}$ に対して成立する．一方，$\Psi_{\alpha\beta}(A)=\Phi(A\cap E_{\alpha\beta}{}^c)$ に補助定理 7 を適用すると，a. e. $x\in E_{\alpha\beta}$ に対して

$$\lim_{h\to+0}\frac{\Phi((x,\ x+h]\cap E_{\alpha\beta}{}^c)}{h}=0.$$

だから，$\mu(H_{\alpha\beta})=0$ なる集合 $H_{\alpha\beta}\subset E_{\alpha\beta}$ が存在して，任意の $x\in E_{\alpha\beta}-H_{\alpha\beta}$ に対して

(19. 23) $$\alpha\leqq\underline{\lim}_{h\to+0}\frac{\Phi((x,\ x+h])}{h}\leqq\overline{\lim}_{h\to+0}\frac{\Phi((x,\ x+h])}{h}\leqq\beta$$

$H=\bigcup H_{\alpha\beta}$ ($\bigcup$ は $0\leqq\alpha<\beta$ なるすべての有理数 α, β の組にわたる）とおくと $\mu(H)=0$ である．さて任意の $x\in(a,\ b]-H$ に対して，$0\leqq\alpha\leqq f(x)<\beta$ なる有理数 α, β をとると，$x\in E_{\alpha\beta}-H_{\alpha\beta}$だから (19. 23) が成立する．ここで α, β は $f(x)$ にいくらでも近くとれるから

$$\lim_{h\to+0}\frac{\Phi((x,\ x+h])}{h}=f(x),$$

すなわち

$$\lim_{h\to+0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)\qquad(x\notin H).$$

$h<0$ のときも同様にして，$\mu(H')=0$ なる集合 H' が存在して $x\notin H'$ ならば

$$\lim_{h\to-0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{\Phi((x-|h|,\ x])}{|h|}=f(x).$$

以上により定理 19. 3 が成立する．(証明終)

以上の記述においては，有界変動函数 $F(x)$ が有限な閉区間 $[a,\ b]$ で定義されているものとしているが，開区間 $(a,\ b)$ でだけ定義されている場合には

(19. 24) $$F(a)=\lim_{x\to a+0}F(x),\qquad F(b)=\lim_{x\to b-0}F(x)$$

と拡張すればよい ($F(x)$ が $(a,\ b)$ で有界変動だから，上の二つの極限値は必ず存在する)．また $R^1=(-\infty,\ \infty)$ 全体で $F(x)$ を考える場合には，定理 19.2 までに関しては $-\infty$, ∞ なる二つの‘点’を両端につけ加えて $[-\infty,\ \infty]$ を形式的に閉区間のように考えればよく，定理 19. 3 は R^1 を有限区間 $(n-1,\ n]$ ($n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$) に分割して，それらの中で証明すればよい．

定理 19.3 において $F(x)$ が絶対連続とはかぎらない一般の有界変動の函数であっても，それを (19. 15) の形に表わしたとき，μ-a.e. x に対して

$$F'(x)=f(x),\qquad G'(x)=0$$

となることが証明される．さらに上の結果は N 次元 Euclid 空間 R^N で定義された集合函数に対しても（微分商の定義を自然な方法で拡張することにより）成立する．また定理 19. 3 においては，定理 19. 2 を使ったから，Radon-Nikodym の定理を使ったことになるが，本来は定理 19.3 は Radon-Nikodym の定理とは無関係に証明されるものであ

る．すなわち，任意の有界変動函数 $F(x)$ はほとんどすべての x で有限な微分商 $F'(x)=f(x)$ を持ち，特に $F(x)$ が絶対連続ならば

$$F(x)-F(a)=\int_a^x f(y)d\mu(y)$$

となる．これらすべての事項は，歴史的には興味あることであるが，現在の解析学との接触面の程度から考えて，そのために紙数を費すことはこのシリーズの趣旨に必ずしも適当ではないと思われるので，本書では省略することにした．

例．$0<r<1$ なる有理数 r の全体は可算集合だから，それを $\{r_1, r_2, \cdots\}$ とし，また $\{\alpha_n\}$ を任意の実数列とする．各 n に対して

$$f_n(x)=\begin{cases}2^{-n}|x-r_n|^{-1/2} & (x\neq r_n)\\ \alpha_n & (x=r_n)\end{cases}$$

と定義し，

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

とおくと，i) $f(x)$ は $[0, 1]$ で Lebesgue 積分可能である．従って

$$F(x)=\int_0^x f(y)dy \qquad (dy \text{ は Lebesgue 測度})$$

は $[0, 1]$ で絶対連続であってほとんどすべての x に対して $F'(x)=f(x)$ となるが，ii) $\{\alpha_n\}$ をどのように定めておいても，x が有理数ならば $F'(x)$ は存在しない．

問 1. 上の i), ii) を証明せよ．

問 2. $[0, 1]$ で連続な函数 $F(x)$ があって，Lebesgue 測度に関してほとんどすべての点 $x\in(0, 1)$ で $F'(x)$ が存在し，$F'(x)$ は Lebesgue 積分可能であるとする．このとき

$$F(x)-F(0)=\int_0^x F'(y)dy$$

は成立するか．

定理 19．3 と Fubini の定理（§15）を使うと，積分記号のもとでの微分に関する定理 14．2 が次のように拡張される．応用上は定理 14．2 の形で大抵まに合うが，ここに拡張された形を書いて証明を与えておこう．

定理 19．4． $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ を測度空間，(a, b) を実数の開区間とする．$X\times(a, b)$ の上の函数 $f(x, \alpha)$ があって，少なくも一点 $c\in(a, b)$ に対して $f(x, c)$ は X の上で可積分，また任意の $x\in X$ を固定するとき $f(x, \alpha)$ は α について絶対連続とする．こ

のとき，$f(x,\ \alpha)$ の α に関する偏導函数 $f_\alpha(x,\ \alpha)$*) が $X\times(a,\ b)$ の上で可積分**) であるならば，任意の $\alpha\in(a,\ b)$ に対して $f(x,\ \alpha)$ は Xの上で可積分であって

$$F(\alpha)=\int_X f(x,\ \alpha)d\mu(x) \tag{19. 25}$$

は α について絶対連続であり，ほとんどすべての α に対して

$$F'(\alpha)=\int_X f_\alpha(x,\ \alpha)d\mu(x). \tag{19. 26}$$

証明. 任意の $\alpha\in(a,\ b)$ に対して，定理 19. 2 および定理 19. 3 により

$$f(x,\ \alpha)-f(x,\ c)=\int_c^\alpha f_\xi(x,\ \xi)d\xi \qquad \left(\begin{array}{l}\alpha<c \text{ のときは，右辺は} -\int_\alpha^c \\ \text{の意味とする；以下同様}\end{array}\right)$$

となるから，仮定と Fubini の定理によって，$f(x,\alpha)$ は X の上で可積分である．従って (19. 25) が定義される．よって上の式の両辺を X の上で積分し，Fubini の定理を使うと

$$F(\alpha)-F(c)=\int_c^\alpha d\xi\int_X f_\xi(x,\ \xi)d\mu(x).$$

ここで $\displaystyle\int_a^b\left|\int_X f_\xi(x,\ \xi)d\mu(x)\right|d\xi\leqq\int_a^b\int_X|f_\xi(x,\ \xi)|d\mu(x)d\xi<\infty$ だから，定理 19. 3 によって，a. e. $\alpha\in(a,\ b)$ に対して (19. 26) の成立することがわかる．

§20. Lebesgue-Stieltjes 積分

$(X,\ \mathfrak{B})$ を Borel 空間とし，その上の加法的集合函数 Φ が与えられているとする．Φ の全変動 V_Φ は $(X,\ \mathfrak{B})$ の上の測度であるから，X の上の任意の $\mathfrak{B}$- 可測函数 $f(x)$ に対して定積分

$$\int_X|f(x)|dV_\Phi(x) \tag{20. 1}$$

が定義される．その値が有限のとき

$$\int_X f(x)d\Phi(x) \qquad \left(\text{または簡単に} \int_X fd\Phi \text{　とも書く}\right) \tag{20. 2}$$

なる積分を次のように定義して，これを加法的集合函数 Φ による $f(x)$ の **Lebesgue-Stieltjes**（ルベーグ-スチルチェス）**積分**という．Jordan の分解式（定理 17. 4）により

---

*) f_α は，f を（x を固定して）α の函数と考えたときの，定理 19. 3 の意味での微分商である．

**) 直積空間 $X\times(a,\ b)$ の上の函数として可測であって可積分という意味である．

Φ は

$$\Phi=\Phi^+-\Phi^-$$

と分解されて，任意の $E\in\mathfrak{B}$ に対して

$$0\leqq\Phi^+(E)\leqq V_\Phi(E),\qquad 0\leqq\Phi^-(E)\leqq V_\Phi(E)$$

だから，(20. 1) の積分が有限なことにより

$$\int_X|f(x)|d\Phi^+(x)<\infty,\qquad \int_X|f(x)|d\Phi^-(x)<\infty$$

である．よって (20. 2) の積分を

$$\int_X f(x)d\Phi(x)=\int_X f(x)d\Phi^+(x)-\int_X f(x)d\Phi^-(x) \tag{20. 3}$$

と定義する．従って，$f=f^+-f^-$ と表わせば

$$\int_X fd\Phi=\int_X f^+d\Phi^+-\int_X f^+d\Phi^--\int_X f^-d\Phi^++\int_X f^-d\Phi^- \tag{20. 4}$$

とも書ける．$f(x)$ と $\Phi(E)$ の一方または両方が複素数値の場合も，実数部分と虚数部分に分けて，まったく同様に定義できる．

Φ^+, Φ^- は測度と考えてよいから，測度空間 $(X,\ \mathfrak{B},\ \Phi^+)$, $(X,\ \mathfrak{B},\ \Phi^-)$ の完備化をそれぞれ $(X,\ \mathfrak{M}_1,\ \Phi_1)$, $(X,\ \mathfrak{M}_2,\ \Phi_2)$ として $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\frown\mathfrak{M}_2$ とおくと，$\mathfrak{M}$ も σ-加法族をなし，

$$\Phi(E)=\Phi_1(E)-\Phi_2(E)\qquad (E\in\mathfrak{M})$$

とおくと，これは加法的 $(\mathfrak{M})$ 集合函数である．（これははじめの Φ の拡張であるが，同じ文字で表わしても混乱は起らないであろう．）このとき Φ の全変動 V_Φ は $\mathfrak{M}$ の上の測度であるから，X の上の函数 $f(x)$ が ($\mathfrak{B}$-可測でなくても) $\mathfrak{M}$-可測であって (20. 1) の積分が有限ならば，前と同様にして (20. 2) の積分を定義できる．これも Φ による f の Lebesgue-Stieltjes 積分という．

<u>直線上の函数の場合</u>. I を R^1 の中の任意の区間とする（開区間でも閉区間でもよいし，また R^1 全体でもよい）．$F(x)$ を I で有界変動な函数とすると，それは二つの単調増加函数の差として

$$F(x)=F_1(x)-F_2(x)$$

と表わされるから，前の§で述べたようにして F_1, F_2 に対応する測度空間

$$(I,\ \mathfrak{M}_1,\ \Phi_1),\qquad (I,\ \mathfrak{M}_2,\ \Phi_2)$$

を作って $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\frown\mathfrak{M}_2$ とすれば，

$$\Phi(E)=\Phi_1(E)-\Phi_2(E)\qquad (E\in\mathfrak{M})$$

は加法的 ($\mathfrak{M}$) 集合函数となる．そして $F(x)$ の全変動 $V_F(x)$ から同様にして測度空間を作ると $(I,\ \mathfrak{M},\ V_\Phi)$ (V_Φ は集合函数 Φ の全変動) になることも，その作り方から容易にわかる．だから，$f(x)$ が I の上の $\mathfrak{M}$-可測函数で (従って特に $\mathfrak{B}_1$ 可測函数ならもちろんよい*))，積分

$$\int_I |f(x)|\,dV_\Phi(x) \tag{20. 1'}$$

が有限ならば，上の一般論で述べた Lebesgue-Stieltjes 積分

$$\int_I f(x)\,d\Phi(x) \tag{20. 2'}$$

が定義される．

特に $I=[a,\ b]$ で $f(x)$ が連続のときは，I の任意の分割:

$$a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n=b \tag{$\triangle$}$$

に対して

$$\delta(\triangle)=\max_{1\leqq\nu\leqq n}(a_\nu-a_{\nu-1})$$

とおき，また

$$\xi_\nu\in[a_{\nu-1},\ a_\nu]\qquad(\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

なる任意の点列 $\{\xi_\nu\}$ をとって

$$\begin{cases} f_\triangle(x)=\begin{cases} f(a) & x=a, \\ f(\xi_\nu) & x\in(a_{\nu-1},\ a_\nu] \end{cases} \\ S(\triangle)=\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\{F(a_\nu)-F(a_{\nu-1})\} \\ S_j(\triangle)=\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\{F_j(a_\nu)-F_j(a_{\nu-1})\} \qquad (j=1,\ 2) \end{cases} \tag{20. 5}$$

($f_\triangle(x)$，$S(\triangle)$，$S_j(\triangle)$ は $\triangle$ だけでなく $\{\xi_\nu\}$ のとり方にも関係する) とおくと

$$S(\triangle)=S_1(\triangle)-S_2(\triangle) \tag{20. 6}$$

であり，また前§の (19. 8) により

$$S_j(\triangle)=\int_I f_\triangle(x)\,d\Phi_j(x)\qquad(j=1,\ 2). \tag{20. 7}$$

ところが $\delta(\triangle)\to0$ のとき $f(x)$ の連続なことにより，$\{\xi_\nu\}$ のとり方に無関係に，I の上で一様に

---

*) $f(x)$ が '$\mathfrak{M}$-可測' という条件は，与えられた有界変動函数 $F(x)$ に関係するが，'$\mathfrak{B}_1$-可測' という条件は $F(x)$ に無関係である．

$$\lim_{\delta(\Delta)\to 0} f_{\Delta}(x)=f(x)$$

となるから，

$$\lim_{\delta(\Delta)\to 0} S_j(\Delta)=\int_I f(x)d\Phi_j(x) \qquad (j=1,\ 2)$$

(定理 13. 6 の系3およびその後の注意3参照)．だから (20. 6) と積分 (20. 2′) の定義により

(20. 8)
$$\lim_{\delta(\Delta)\to 0} S(\Delta)=\int_I f(x)d\Phi_1(x)-\int_I f(x)d\Phi_2(x)=\int_I f(x)d\Phi(x).$$

(20. 5) により，上の式の左辺は連続函数 $f(x)$ の有界変動函数 $F(x)$ による Riemann-Stieltjes 積分を定義する式であり，それがこの§の一般論で定義した Lebesgue-Stieltjes 積分に等しいことがわかったわけである．だから $f(x)$ が連続とはかぎらない場合にも，(20. 2′) の積分が定義されるかぎりその積分を

$$\int_a^b f(x)dF(x)$$

とも書き，函数 $f(x)$ の有界変動函数 $F(x)$ による **Lebesgue-Stieltjes 積分**と呼ぶ．なおこの書き方によれば，積分 (20. 1′) が有限という条件は

$$\int_a^b |f(x)|dV_F(x)<\infty$$

となる (前に述べたように，V_F から作った測度が V_Φ になるからである)．

Lebesgue-Stieltjes 積分の性質は，はじめの一般的定義から容易にわかるように，普通の測度による積分の性質に帰着されるから，それらをくりかえす必要はない．例えば Lebesgue の項別積分定理においても，‘積分可能’というところを‘V_Φ について積分可能’とすればよいことは明らかである．だから前の章で述べた積分の性質に含まれていない二・三の定理を以下に述べる．

定理 20. 1 (積分変数の変換)．$(X,\ \mathfrak{B},\ \mu)$ を測度空間とし，Φ を X の上の加法的 $(\mathfrak{B})$集合函数で，μ に関して絶対連続，従って

(20. 9)
$$\Phi(E)=\int_E \varphi(x)d\mu(x) \qquad (E\in\mathfrak{B})$$

と表わされるものとする．このとき $\mathfrak{B}$-可測函数 $f(x)$ が X の上で Φ の全変動 V_Φ について可積分なことと，$f(x)\varphi(x)$ が X の上で μ について可積分なこととは同等であって

(20. 10)
$$\int_X f(x)d\Phi(x)=\int_X f(x)\varphi(x)d\mu(x).$$

証明. $f(x)\geqq 0$, $\Phi(E)\geqq 0$ の場合に証明すればよい．そのとき，$f(x)$ に対して単函数 $f_n(x)\geqq 0$ の単調増加列で

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

となるものが存在する．各 $f_n(x)$ は

$$f_n(x)=\sum_{j=1}^{k_n}\alpha_{nj}\chi_{E_{nj}}(x),\qquad \sum_j E_{nj}=X,$$

なる形に表わされるから，積分の定義と (20. 9) とにより

$$\int_X f_n(x)d\Phi(x)=\sum_j \alpha_{nj}\Phi(E_{nj})=\sum_j\int_{E_{nj}}\alpha_{nj}\varphi(x)d\mu(x)$$
$$=\sum_j\int_{E_{nj}}f_n(x)\varphi(x)d\mu(x)=\int_X f_n(x)\varphi(x)d\mu(x).$$

$n\to\infty$ のとき，$f_n(x)\varphi(x)$ も n について単調増加で $f(x)\varphi(x)$ に近づくから，上の式から

$$\int_X f(x)d\Phi(x)=\int_X f(x)\varphi(x)d\mu(x);$$

ここで $f(x)\geqq 0$, $\Phi(E)\geqq 0$, 従って $f(x)\varphi(x)\geqq 0$ だから，この式の左辺が有限なことは $f(x)$ が V_Φ について可積分なことであり，右辺が有限なことは $f(x)\varphi(x)$ が μ について可積分なことである．だからこの式によって定理が証明されたことになる．

(証明終)

今後 R^1 の上の Lebesgue 測度による積分は $d\mu(x)$ のかわりに dx と書く．

閉区間 $I=[a, b]$ で $F(x)$ が絶対連続ならば，定理 19. 2 と定理 19. 3 により

(20. 11)
$$F(x)-F(a)=\int_a^x\varphi(y)dy,\qquad \varphi(x)=F'(x).$$

この F から前§に述べたようにして作った加法的集合函数 $\Phi(E)$ は Lebesgue 測度に関して絶対連続で

$$\Phi(E)=\int_E\varphi(y)dy\quad\left(\int_a^b|\varphi(y)|dy<\infty\right)$$

と表わされる．だから定理 20. 1 により，I の上の Borel 可測函数 $f(x)$ に対して

(20. 12)
$$\int_a^b f(x)dF(x)=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx,$$

ただし，両辺のうち一方の積分が存在して有限ならば他方もそうであって，この等式が成

立するのである．特にほとんどすべての $x \in I$ に対して $\varphi(x)>0$ ならば，$F(x)$ は狭義単調増加である．このとき $F(a)=\alpha$, $F(b)=\beta$ とおくと函数 $y=F(x)$ によって区間 $[a, b]$ が区間 $[\alpha, \beta]$ に一対一に対応する．だから

$$g(y)=f(F^{-1}(y)) \qquad (F^{-1} \text{ は } F \text{ の逆函数})$$

とおくと $f(x)=g(F(x))$ であるから，(20. 12) は

$$\int_\alpha^\beta g(y)dy=\int_a^b g(F(x))F'(x)dx$$

となる．これは Riemann 積分の場合の置換積分の式に相当する．

次に，$[a, b]$ において $F(x)$ が（有界変動であるばかりでなく）連続な場合には，$f(x)$ が $[a, b]$ で有界変動なら（連続ではなくても），Lebesgue-Stieltjes 積分

$$\int_a^b f(x)dF(x)$$

は (20. 5) で与えられる 'Riemann 式の近似和' $S(\Delta)$ の極限になることを示そう．そのための準備として

補助定理. $f(x)$ が $[a, b]$ で有界変動ならば，$f(x)$ の不連続点の集合は可算集合である．

証明. 有界変動函数は二つの単調増加函数の差として表わされるから，$f(x)$ が単調増加の場合にこの補助定理を証明すればよい．その場合は，任意の点 $x \in [a, b]$ において

$$f(x+0)-f(x-0) \geqq 0^{*)}$$

であるから，$f(x)$ のすべての不連続点の集合 D は

$$D=\{x;\ f(x+0)-f(x-0)>0\}$$

と表わされる．従って，$D_m=\left\{x;\ f(x+0)-f(x-0)>\dfrac{1}{m}\right\}$ $(m=1, 2, \cdots)$ とおくと

$$D=\bigcup_{m=1}^{\infty} D_m$$

となるから，各 m に対して D_m が有限集合であることを示せば十分である．今 $x_1<\cdots<x_n$ なる n 個の点が D_m に属するとすれば，$f(x)$ が単調増加であることにより

$$f(a) \leqq f(x_1-0)<f(x_1+0) \leqq f(x_2-0)<f(x_2+0) \leqq \cdots$$
$$\cdots \leqq f(x_n-0)<f(x_n+0) \leqq f(b)$$

---

*) $f(x+0)=\lim\limits_{y\to x+0} f(y)$, $f(x-0)=\lim\limits_{y\to x-0} f(y)$（ただし $f(a-0)=f(a)$, $f(b+0)=f(b)$）; $f(x)$ が単調増加だから，これらの極限値は必ず存在する．従ってまた，$f(x+0)-f(x-0)$ は点 x において $f(x)$ のグラフが跳躍する高さである．

だから,

$$f(b)-f(a) \geqq \sum_{\nu=1}^{n} \{f(x_\nu+0)-f(x_\nu-0)\} > \frac{n}{m}.$$

従って $n<m\{f(b)-f(a)\}<\infty$, すなわち n は $m\{f(b)-f(a)\}$ より小さい整数でなければならない. だから D_m は有限集合である. (証明終)

さて $[a, b]$ の分割$\triangle$と点列 $\{\xi_\nu\}$ に対して $f_\triangle(x)$, $S(\triangle)$, $S_j(\triangle)$ $(j=1, 2)$ を (20. 5) によって定義すると, x が f の連続点ならば

(20. 13)
$$\lim_{\delta(\triangle)\to 0} f_\triangle(x)=f(x)$$

である. $F(x)$ が連続ならば, 対応する測度 Φ_1, Φ_2 については一点は測度 0 の集合であるから, 上の補助定理により f の不連続点の全体は測度 0 の集合をなす. 従って測度 Φ_1 および Φ_2 に関してほとんどすべての x で (20. 13) が成立する. また函数族 $\{f_\triangle(x)\}$ は一様有界である. だから

$$\lim_{\delta(\triangle)\to 0} S_j(\triangle)=\lim_{\delta(\triangle)\to 0}\int_I f_\triangle(x)d\Phi_j(x)=\int_I f(x)d\Phi_j(x) \qquad (j=1, 2).$$

従って

$$\lim_{\delta(\triangle)\to 0} S(\triangle)=\int_a^b f(x)dF(x).$$

定理 20. 2 (部分積分法). 開区間 (a, b) において $F(x)$ は連続で有界変動, $\varphi(x)$ は有界変動とすると

(20. 14)
$$\int_a^b \varphi(x)dF(x)=F(b)\varphi(b)-F(a)\varphi(a)-\int_a^b F(x)d\varphi(x).$$

証明. §19 の最後に注意したように $F(x)$, $\varphi(x)$ は (19. 24) によって閉区間 $[a, b]$ まで拡張されるから, 閉区間 $[a, b]$ で定理の仮定を満たしているとしてよい. 従って積分

$$\int_a^b \varphi(x)dF(x), \qquad \int_a^b F(x)d\varphi(x)$$

はどちらも, 前に述べたように, 分割 $\triangle$ と点列 $\{\xi_\nu\}$ による Riemann 式の近似和で近づけられる. 特に $\xi_\nu=a_\nu$ とした場合, または $\xi_\nu=a_{\nu-1}$ とした場合だけ考えてもよいから

$$\int_a^b \varphi(x)dF(x)=\lim_{\delta(\triangle)\to 0}\sum_{\nu=1}^{n} \varphi(a_\nu)\{F(a_\nu)-F(a_{\nu-1})\}$$

$$=\lim_{\delta(\triangle)\to 0}\left[\sum_{\nu=1}^{n} \{\varphi(a_{\nu-1})-\varphi(a_\nu)\}F(a_{\nu-1})+\varphi(a_n)F(a_n)-\varphi(a_0)F(a_0)\right]$$

$$=-\int_a^b F(x)d\varphi(x)+F(b)\varphi(b)-F(a)\varphi(a).$$

系 (部分積分法). 開区間 $(a,\ b)$ において $f(x)$ は Lebesgue 積分可能, $\varphi(x)$ は有界変動ならば,

$$F(x)=\int_a^x f(y)dy+F(a) \qquad (F(a)\ \text{は任意に与えた定数})$$

とおくと

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=F(b)\varphi(b)-F(a)\varphi(a)-\int_a^b F(x)d\varphi(x).$$

さらに $\varphi(x)$ が絶対連続ならば, 最後の項は $\int_a^b F(x)\varphi'(x)dx$ となる.

この系は上の定理 20. 2 と (20. 12) とから明らかである.

定理 20. 3 (**積分法の第二平均値定理—I**). 開区間 $(a,\ b)$ において $F(x)$ は連続で有界変動, $\varphi(x)$ は単調増加で有界ならば, $a<c<b$ で

$$\int_a^b \varphi(x)dF(x)=\varphi(a)\{F(c)-F(a)\}+\varphi(b)\{F(b)-F(c)\} \tag{20. 15}$$

となる c が存在する, ただし

$$\begin{cases}\varphi(a)=\lim\limits_{x\to a+0}\varphi(x), & \varphi(b)=\lim\limits_{x\to b-0}\varphi(x),\\ F(a)=\lim\limits_{x\to a+0}F(x), & F(b)=\lim\limits_{x\to b-0}F(x).\end{cases} \tag{20. 16}$$

証明. 仮定により定理 20. 2 が使える. 特に $\varphi(x)$ が単調増加だから, 対応する集合函数 $\Phi(E)$ は測度である. $F(x)$ が連続だから, (20. 14) の最後の項に積分法の第一平均値定理 (定理 12. 5 の系において $g\equiv 1.\ \mu\equiv\Phi$) を適用すると, $a<c<b$ で

$$\int_a^b F(x)d\varphi(x)=F(c)\Phi((a,\ b])=F(c)\{\varphi(b)-\varphi(a)\}$$

となる c が存在する. これを (20. 14) に代入すれば (20. 15) が得られる.

系 (**積分法の第二平均値定理—II**). 開区間 $(a,\ b)$ において $f(x)$ は Lebesgue 積分可能, $\varphi(x)$ は単調増加で有界ならば, $a<c<b$ で

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\varphi(a)\int_a^c f(x)dx+\varphi(b)\int_c^b f(x)dx$$

となる c が存在する, ただし $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ は (20. 16) で定義する.

証明. 上の定理において

$$F(x)=\int_a^x f(y)dy$$

とおけばよい.

問 1. この§の最初に使った記号で，積分 (20. 1) が有限ならば

$$\left|\int_X f d\Phi\right| \leqq \int_X |f| dV_\Phi \qquad (V_\Phi \text{ は } \Phi \text{ の全変動}).$$

ここで f および Φ は複素数値でもよい.

問 2. Φ が R^N の上の加法的$(\mathfrak{B}_N)$集合函数，f が集合 $E \in \mathfrak{B}_N$ の上の $\mathfrak{B}_N$-可測函数で

$$\int_E |f(x)| dV_\Phi(x) < \infty$$

とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，或る有界集合の外では恒等的に 0 になるような R^N の上の連続函数 $f_\varepsilon(x)$ で

$$\left|\int_E f d\Phi - \int_E f_\varepsilon d\Phi\right| \leqq \int_E |f - f_\varepsilon| dV_\Phi < \varepsilon$$

となるものが存在する.

§21. Lebesgue 測度の性質(続き)

R^N の上の Lebesgue 測度については，一般の測度の性質以外のものを§7 で述べ，また§12 でも R^N の上の Lebesgue 積分のいくつかの性質 (定理 12. 5—12. 7) を述べたが，この§では Lebesgue 測度に関する絶対連続性に関係した事項およびそのことから出る二・三の結果を述べる.

R^N の中の Lebesgue 可測集合の全体を $\mathfrak{M}$ とし，Lebesgue 測度を μ とする．以下の議論は，$\mathfrak{M}$ を R^N の中の Borel 集合族 $\mathfrak{B}_N$ でおきかえ，μ を $\mathfrak{B}_N$ の上だけで考えてもそのまま成立する(定理 21. 2 を除く)が，一々ことわらない．また積分範囲が R^N のときは $\int$ の下の R^N を省略する.

Φ を $(R^N, \mathfrak{M})$ の上の測度で§18 の注意 3 の条件が満たされているものとする．任意の $y \in R^N$ に対して，$E \in \mathfrak{M}$ ならば $[E+y] \in \mathfrak{M}$ (§7 参照) だから,

$$\Phi_y(E) = \Phi([E+y]) \tag{21. 1}$$

と定義すると Φ_y もまた $(R^N, \mathfrak{M})$ の上の測度で，Φ と同じ条件を満たしている．このとき,

定理 21. 1. 任意の y に対して Φ_y が Φ に関して絶対連続ならば，Φ は Lebesgue 測度 μ に関して絶対連続である.

証明. $E \in \mathfrak{M}$, $\mu(E) = 0$ と仮定する．まず

$$\Phi([E-y]) = \int \chi_{[E-y]}(x) d\Phi(x) = \int \chi_E(x+y) d\Phi(x)$$

(χ_A は A の定義函数）だから，両辺を μ について積分して，右辺に Fubini の定理 15. 3 の 2) と定理 12. 7 とを適用すると

$$\int \Phi([E-y])d\mu(y)=\int d\Phi(x)\int \chi_E(x+y)d\mu(y)=\int d\Phi(x)\int \chi_E(y)d\mu(y)$$

$$=\int \mu(E)d\Phi(x)=0.$$

だから μ-a. e. y に対して $\Phi([E-y])=0$. 従って $\Phi([E-y_0])=0$ なる y_0 が存在する. だから仮定により $\Phi_{y_0}([E-y_0])=0$, 従って

$$\Phi(E)=\Phi([[E-y_0]+y_0])=\Phi_{y_0}([E-y_0])=0$$

となり，Φ が μ に関して絶対連続である.

定理 21. 2. R^N の部分集合の或る σ-加法族 $\mathfrak{M}_1$ で定義された測度 μ_1 があって，

(21. 2) $\begin{cases} E\in\mathfrak{M}_1 \text{ ならば任意の } x\in R^N \text{ に対して} \\ [E+x]\in\mathfrak{M}_1,\ \mu_1([E+x])=\mu_1(E), \end{cases}$

(21. 3) $\begin{cases} R^N \text{ の中の‘単位立方体’} K=[0,\ 1]\times[0,\ 1]\times\cdots\times[0,\ 1] \text{ は} \\ \mathfrak{M}_1 \text{ に属し } \mu_1(K)<\infty \text{ である} \end{cases}$

と仮定すると，

(21. 4) $$\mathfrak{M}\supset\mathfrak{M}_1\supset\mathfrak{B}_N$$

であって

(21. 5) $\begin{cases} \text{或る定数 } c\geqq 0 \text{ が存在して，すべての } E\in\mathfrak{M}_1 \text{ に対して} \\ \mu_1(E)=c\mu(E). \end{cases}$

従って特に測度空間 (R^N, $\mathfrak{M}_1$, μ_1) が完備ならば $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}$ であり，さらに

(21. 6) $$\mu_1(K)=1$$

を仮定すれば μ_1 は Lebesgue 測度と同じものである.

証明. $0<\alpha<1$ なる任意の α に対して $K_\alpha=[0,\ \alpha]\times[0,\ \alpha]\times\cdots\times[0,\ \alpha]$ とおき，また R^N の中ですべての座標が α に等しい点を $x_{(\alpha)}$ と書くことにすると，

$$K_\alpha=K\frown[K-x_{(1-\alpha)}]$$

だから，(21. 2), (21. 3) により $K_\alpha\in\mathfrak{M}_1$. 従って任意の $x\in R^N$ に対して $[K_\alpha+x]\in\mathfrak{M}_1$ である. 次に任意の開集合 $G\subset R^N$ は，$[K_\alpha+x]$ なる形の集合の可算個の和集合になることが，定理 6. 4 の証明と同じ方法で示されるから，$G\in\mathfrak{M}_1$ である. 従って $\mathfrak{B}_N$ の定義により $\mathfrak{B}_N\subset\mathfrak{M}_1$ である. そこで μ_1 を $\mathfrak{B}_N$ の上で考えると，(21. 2), (21. 3) により R^N は μ_1-測度有限な集合（例えば K を平行移動したもの）の可算個の和であり，μ_1 は定理 21. 1 の Φ に対する仮定を満たす. だから定理 21. 1 と Radon-Nikodym

の定理 18. 4 により，任意の有界集合の上で μ について可積分な函数 $f(x)\geqq 0$ が存在して，任意の $E\in\mathfrak{B}_N$ に対して

$$(21.\ 7)\qquad \mu_1(E)=\int_E f(y)d\mu(y)$$

となる．ところが (21. 2) と Lebesgue 積分の不変性 (定理 12. 6) により

$$(21.\ 8)\qquad \mu_1(E)=\mu_1([E+x])=\int_{[E+x]} f(y)d\mu(y)=\int_E f(y+x)d\mu(y).^{*)}$$

(21. 7) と (21. 8) により．任意の $x\in R^N$ に対して

$$(21.\ 9)\qquad f(y)=f(y+x)\qquad (\mu\text{-a. e. } y).$$

だから Fubini の定理により (§15, 注意 3 参照) μ-a. e. y に対して，従って或る y_0 が存在して

$$(21.\ 10)\qquad f(y_0)=f(y_0+x)\qquad (\mu\text{-a. e. } x).$$

だから，$f(y_0)=c$ とおくと，再び Lebesgue 積分の不変性によって

$$\int|f(x)-c|d\mu(x)=\int|f(y_0+x)-f(y_0)|d\mu(x)=0.$$

すなわち $f(x)=c$ (μ-a. e. x)．だから (21. 7) により任意の $E\in\mathfrak{B}_N$ に対して

$$\mu_1(E)=c\mu(E)$$

となる．μ, μ_1 から導かれた外測度 (§8) をそれぞれ μ^*, $\mu_1{}^*$ とすると．μ^* は Lebesgue 外測度であって $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_{\mu^*}$ (§5 の記号で)，$\mathfrak{M}_1\subset\mathfrak{M}_{\mu_1^*}$ である．ところが任意の集合 $A\subset R^N$ に対して

$$\mu_1{}^*(A)=\inf_{A\subset B\in\mathfrak{B}_N}\mu_1(B)=\inf_{A\subset B\in\mathfrak{B}_N}c\mu(B)=c\mu^*(A)$$

となるから $\mathfrak{M}_{\mu^*}=\mathfrak{M}_{\mu_1^*}$ である．だから $\mathfrak{M}_1\subset\mathfrak{M}$ となり，すべての $E\in\mathfrak{M}_1$ に対して $\mu_1(E)=c\mu(E)$ が成立する．従って (R^N, $\mathfrak{M}_1$, μ_1) が完備なら $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}$ である．特に (21. 6) が成立すれば，(21. 5) において $E=K$ とおくと $c=1$ でなければならないから，すべての $E\in\mathfrak{M}_1$ に対して $\mu_1(E)=\mu(E)$ である．すなわち μ_1 は μ と同じものである ($\mathfrak{M}_1\neq\mathfrak{M}$ のときでも零集合だけの違いしかない――§8 参照)．

注意 1. 上の定理において (21. 3) の K のかわりに

$$I=(0,\ 1]\times(0,\ 1]\times\cdots\times(0,\ 1]$$

---

*) くわしく書くと $\int_{[E+x]} f(y)d\mu(y)=\int\chi_{[E+x]}(y)f(y)d\mu(y)$

$=\int\chi_{[E+x]}(y+x)f(y+x)d\mu(y)=\int\chi_E(y)f(y+x)d\mu(y)=$ 右辺；

このような変形は Lebesgue 積分に関する計算でよく使われる．

または

$$J=(0,\ 1)\times(0,\ 1)\times\cdots\times(0,\ 1)$$

が $\mathfrak{M}$ に属すること（それに従って (21. 6) は $\mu_1(I)=1$ または $\mu_1(J)=1$）を仮定してもよいことは，上の証明から明らかである．

注意 2. R^N の上の Lebesgue 測度は，本来素朴な意味での体積の概念を完全加法的なものに拡張したものであって，第 II 章にその一つの構成法が与えられているわけであるが，別に或る測度 μ_1 がそのような拡張であるならば，(21. 2), (21. 3), (21. 6) は最小限度の要求と見なしてよいであろう．ところが上の定理によれば，この三つの条件を満たす測度は前に与えた Lebesgue 測度以外に存在しないことがわかった．従って Lebesgue 測度が (21. 2), (21. 3), (21. 6) の三つの条件によって特徴づけられたと言ってもよいわけである．

Euclid 空間における体積（素朴な意味での）は，平行移動によって不変であるばかりでなく，任意の合同変換で不変である．Lebesgue 測度は上に述べたように，一般の測度としての性質のほか，平行移動による不変性（これを単に‘不変性’と呼んだ）と単位立方体の可測性だけで特徴づけられたが，この Lebesgue 測度が実は任意の合同変換で不変なことを示そう．それには原点のまわりの任意の回転および裏返しに対して不変なことを示せばよい．

T を R^N における原点のまわりの任意の回転，裏返し，またはそれらを合成した変換とする．（そのような T は或る直交行列で表わされる．*)）任意の $x,\ y\in R^N$ に対して，それらをベクトルと考えると，$T(x+y)=Tx+Ty$ が成立する．だから，任意の集合 $E\subset R^N$ に対して，

(21. 11) $$TE=\{Ty;\ y\in E\}$$

と定義すると，

(21. 12) $$T[E+x]=[TE+Tx].$$

以上のことを使って次の定理を証明する．

定理 21. 3. $E\in\mathfrak{M}$ ならば，$TE\in\mathfrak{M}$ であって $\mu(TE)=\mu(E)$.

証明. 任意の $E\in\mathfrak{B}_N$ に対して

$$TE\in\mathfrak{B}_N,\qquad \mu(TE)=\mu(E)$$

となることを示せば，あとは前の定理の証明と同様にしてこの定理が証明される．

$E\in\mathfrak{B}_N$ ならば $TE\in\mathfrak{B}_N$ なること．$\mathfrak{A}=\{E;\ TE\in\mathfrak{B}_N\}$ とおくと，E が開集合ならば

*) 例えば，このシリーズの中の佐武一郎著，線型代数学（裳華房）173—174 頁参照.

TE も開集合だから，$\mathfrak{A}$ はすべての開集合を含む．また

(21. 13)　　$T\phi=\phi$ （ϕ は空集合），　$TE^c=(TE)^c$,

(21. 14)　　$$T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty} TE_n$$

だから，$\mathfrak{A}$ は σ-加法族をなす．よって $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}_N$，すなわち $E\in\mathfrak{B}_N$ ならば $TE\in\mathfrak{B}_N$ である．

$\mu(TE)=\mu(E)$ の証明．任意の $E\in\mathfrak{B}_N$ に対して $\mu_T(E)=\mu(TE)$ と定義すると，上に証明したことにより，μ_T は $\mathfrak{B}_N$ の上の測度である．((21. 14) において $\{E_n\}$ がどの二つも交わらないならば $\{TE_n\}$ もどの二つも交わらない．このことにより μ_T の完全加法性が出る．）また任意の $x\in R^N$ に対して，(21. 12) と μ の平行移動による不変性とにより

$$\mu_T([E+x])=\mu(T[E+x])=\mu(TE+Tx)=\mu(TE)=\mu_T(E).$$

よって $(R^N,\ \mathfrak{B}_N,\ \mu_T)$ は前の定理の $(R^N,\ \mathfrak{M}_1,\ \mu_1)$ に対する仮定を満たすから，或る定数 c が存在して，任意の $E\in\mathfrak{B}_N$ に対して $\mu_T(E)=c\mu(E)$．特に E として原点を中心とする球の内部（それは開集合だから $\mathfrak{B}_N$ に属する）を考えると $TE=E$ だから，

$$\mu_T(E)=\mu(TE)=\mu(E)>0.$$

だから $c=1$ でなければならない．以上により任意の $E\in\mathfrak{B}_N$ に対して $\mu(TE)=\mu(E)$ となる．（証明終）

特に，$TE=[-E]\equiv\{-x;\ x\in E\}$ とすると，上の定理は

$$E\in\mathfrak{M} \text{ ならば } [-E]\in\mathfrak{M},\quad \mu([-E])=\mu(E)$$

となる．これは定理 7. 1 の一部である．

問 1. R^N の上で $f(x)$ は有界可測，$g(x)$ は Lebesgue 積分可能ならば

(21. 15)　　$$h(x)=\int_{R^N} f(x-y)g(y)dy$$

は R^N で一様連続である．

（ヒント．定理 12. 7 を使って $|h(x+z)-h(x)|\leqq\int|f(x-y)|\cdot|g(y+z)-g(y)|dy$ を出し，f の有界性と定理 12. 8 を使え．）

問 2. 集合 $A,\ B\subset R^N$ に対して $[A-B]=\{x-y;\ x\in A,\ y\in B\}$ と定義すると，A が正の Lebesgue 測度をもてば，$[A-A]$ は R^N の原点を内点として含む．

（ヒント．(21. 15) において $f=\chi_A,\ g=\chi_{[-A]}$ とすると，$h(x)>0$ となるのは $x\in[A-A]$ のときにかぎることを示し，上の問 1 を使え．）

V 函数空間

§22. 測度空間の上の函数空間——I. 空間 L^p

空間 X の上の複素数値函数で，或る条件（可測，可積分，連続など）を満たすもの全体を考察の対象として一つの空間と考えるとき，それを函数空間という．

（複素数値函数のかわりに実数値函数だけに考察の対象を限ることもある．その場合はこの章の中の記述で‘α は複素数’とあるところをすべて‘α は実数’とすればよい.*)）

函数 f, g に対して $f(x)+g(x)$, $\alpha f(x)$（α は複素数）をそれぞれ $f+g$, αf で表わす．以下この§では，測度空間の上で定義される函数空間のいくつかの例と，それらの重要な性質を述べる．

$(X, \mathfrak{B}, \mu)$ を測度空間とし，以後これを固定する．今後函数は，特にことわらないかぎり，X の上で（或いは X の上で μ に関してほとんどいたる所）定義された複素数値 $\mathfrak{B}$-可測函数とし，また函数 $f(x)$ の，集合 $E\in\mathfrak{B}$ の上での測度 μ による積分を $\int_E f(x)dx$ と（μ を省略して）書く．さらに $E=X$ のときは E も省略して $\int f(x)dx$ と書くことが多い．

空間 L^p. p を 1 またはそれより大きい実数とする．X の上の $\mathfrak{B}$-可測函数 $f(x)$ で

$$\int |f(x)|^p dx<\infty$$

なるものの全体を $L^p(X)$ または単に L^p と書く，ただし $f(x)=g(x)$ (a.e. x) のときは f と g とは同じ函数と考えることにする．特に $\mathfrak{B}$, μ をも明確に示したいときは $L^p(X, \mathfrak{B}, \mu)$ と書く．以下 $p=1$ または 2 の場合を主として述べる．L^1, L^2 に共通に言えることは L^pとして述べるが，それらは特にことわらないかぎり一般の L^p ($p\geqq 1$) で成立する．

$f\in L^p(X)$ に対して

$$\|f\|_p=\left\{\int |f(x)|^p dx\right\}^{1/p}$$

を f の L^p-**ノルム**または（L^p **における**）**ノルム**という．或る p を固定して話を進める時

---

*) 後に（162 頁）述べる一般の線型ノルム空間，Banach 空間の定義においても同様である．

は誤解の恐れがなければ $\|f\|_p$ を単に $\|f\|$ と書く.

補助定理 1. 任意の $f\in L^p$ に対して，次の性質を持つ $f_n\in L^p$ $(n=1, 2, \cdots)$ が存在する:

i) 各 n に対して $f_n(x)$ は有界，$\mu(X(f_n\neq 0))<\infty$ であって

$$|f_n(x)|\leqq|f_{n+1}(x)|\leqq|f(x)|;$$

ii) a. e. x で $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ で，しかも $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_p=0$.

証明. $E_n=X(1/n\leqq|f|\leqq n)$ とおき

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x) & (x\in E_n)\\ 0 & (x\notin E_n)\end{cases}\qquad (n=1, 2, \cdots)$$

と定義すると，a. e. x で $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$，$|f_n(x)|\leqq|f_{n+1}(x)|\leqq|f(x)|$ であって，$\int|f(x)|^p dx<\infty$ だから，§13 の問 1 により $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_p=0$ である．各 $f_n(x)$ が有界なことは明らか．また $X(f_n\neq 0)=E_n$ であって

$$\|f\|_p{}^p\geqq\int_{E_n}|f(x)|^p dx\geqq\frac{1}{n^p}\mu(E_n)$$

だから，$\mu(X(f_n\neq 0))=\mu(E_n)\leqq n^p\|f\|_p{}^p<\infty$.

補助定理 2 (Schwarz の不等式). f, $g\in L^2$ ならば

$$\left|\int f(x)\overline{g(x)}dx\right|^2\leqq\int|f(x)|^2dx\int|g(x)|^2dx. \tag{22. 1}$$

証明. まず $f(x)$, $g(x)$ が有界で $\mu(X(f\neq 0))<\infty$, $\mu(X(g\neq 0))<\infty$ の場合を考え，

$$(f,\ g)=\int f(x)\overline{g(x)}dx \tag{22. 2}$$

とおく；この積分が存在することは明らかである．このとき，$\|f\|_2$ を単に $\|f\|$ と書くことにすれば，(22. 1) は

$$|(f,\ g)|^2\leqq\|f\|^2\|g\|^2 \tag{22. 1'}$$

となる．$f(x)=0$ (a. e.) のときは (22. 2) により $(f,\ g)=0$ だから，(22. 1') は明らかに成立する．よって $f(x)=0$ (a. e.) ではないとすると，$\|f\|>0$ である．さて任意の複素数 α に対して

$$(\alpha f-g,\ \alpha f-g)=\|\alpha f-g\|^2\geqq 0;$$

この左辺を $(f,\ g)$ の定義 (22. 2) に従って書きなおすと

$$|\alpha|^2\|f\|^2-\alpha(f,\ g)-\bar{\alpha}(g,\ f)+\|g\|^2\geqq 0.$$

ここで $\alpha=(g,\ f)/\|f\|^2$ とおけば

$$\frac{|(f,\ g)|^2}{\|f\|^2}-\frac{(g,\ f)(f,\ g)}{\|f\|^2}-\frac{\overline{(g,\ f)}\,(g,\ f)}{\|f\|^2}+\|g\|^2\geqq 0.$$

(22. 2) により $(g,\ f)=\overline{(f,\ g)}$ だから，これを上の式に代入して両辺に $\|f\|^2$ (>0) を掛ければ (22. 1′) が得られる.

次に一般の $f,\ g\in L^2$ に対しては，補助定理1の性質をもつ函数列 $\{f_n\}$，$\{g_n\}$ を作ると，上に証明したことにより

$$\left\{\int|f_n(x)|\cdot|g_n(x)|dx\right\}^2\leqq\int|f_n(x)|^2dx\int|g_n(x)|^2dx\leqq\|f\|^2\|g\|^2. \tag{22. 3}$$

$|f_n(x)|\cdot|g_n(x)|$ は n について単調増加だから，$n\to\infty$ として

$$\left\{\int|f(x)|\cdot|g(x)|dx\right\}^2\leqq\|f\|^2\|g\|^2<\infty.$$

すなわち $|f(x)|\cdot|g(x)|$ は可積分であり，また $|f_n(x)\overline{g_n(x)}|\leqq|f(x)|\cdot|g(x)|$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ である. 一方 (22. 3) から

$$\left|\int f_n(x)\overline{g_n(x)}dx\right|^2\leqq\left\{\int|f_n(x)|\cdot|g_n(x)|dx\right\}^2\leqq\|f\|^2\|g\|^2$$

だから，$n\to\infty$ とすれば Lebesgue の収束定理 13. 6 により

$$\left|\int f(x)\overline{g(x)}dx\right|^2\leqq\|f\|^2\|g\|^2;$$

すなわち (22. 1) が証明された.

補助定理 3. $f,\ g\in L^p$ ならば，$\alpha f\in L^p$ (α は複素数)，$f+g\in L^p$ であって

$$\|f+g\|_p\leqq\|f\|_p+\|g\|_p. \tag{22. 4}$$

証明. $\alpha f\in L^p$ は明らか. また $p=1$ のときは，$f+g\in L^1$，$\|f+g\|_1\leqq\|f\|_1+\|g\|_1$ も積分の性質から明らかである. $p=2$ のときの証明:

$$|f(x)+g(x)|^2=|f(x)|^2+f(x)\overline{g(x)}+g(x)\overline{f(x)}+|g(x)|^2$$

において，補助定理2により右辺の各項は可積分，従って左辺も可積分である. すなわち $f+g\in L^2$. 従って，再び補助定理2を使って

$$\begin{aligned}\|f+g\|_2{}^2&=(f+g,\ f+g)\leqq\|f\|_2{}^2+|(f,\ g)|+|(g,\ f)|+\|g\|_2{}^2\\&\leqq\|f\|_2{}^2+2\|f\|_2\cdot\|g\|_2+\|g\|_2{}^2=(\|f\|_2+\|g\|_2)^2;\end{aligned}$$

この式から (22. 4) が得られる.

一般の $p>1$ については，後述の Minkowski の不等式を参照.

さて補助定理3により，空間 L^p はベクトル空間*)であることがわかる（一般に無限次

*) 佐武一郎著，線型代数学（裳華房）115頁参照. $f(x)=0$ (a. e.) なる函数 f が0ベクトルである.

元)．ベクトル空間のことを**線型空間**（または**線状空間**）ともいう．

一般に線型空間 E（具体的な函数空間でなくてもよい）があって，その中の各ベクトル f に対して $\|f\|$ で表わされる実数が対応し

（1）$\|f\|\geqq 0$; $f=0$ のとき，かつそのときにかぎり $\|f\|=0$;

（2）$\|\alpha f\|=|\alpha|\cdot\|f\|$ （α は複素数）;

（3）$\|f+g\|\leqq\|f\|+\|g\|$

を満たすとき，$\|f\|$ を $f\in E$ の**ノルム**といい，ノルムの定義された線型空間 E を **線型ノルム空間**という．

線型ノルム空間 E において f, $g\in E$ に対して $\rho(f, g)=\|f-g\|$ とおくと，$\rho(f, g)$ は距離の公理（付録参照）を満たすから，E は距離空間になる．この距離空間が完備（付録§4）なとき，E はノルム $\|\cdot\|$ に関して**完備**であるという．ノルムに関して完備な線型ノルム空間を **Banach(バナッハ)空間**という．

上にあげた例 L^p は Banach 空間（後述定理 22. 1) である．また複素数の全体 C は，普通の絶対値をノルムとして Banach 空間である．函数列 $\{f_n\}\subset L^p$ が函数 $f\in L^p$ にノルム $\|\cdot\|_p$（による距離）に関して収束するとき，すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_p=0$$

なるとき，$\{f_n\}$ は f に p **次平均収束**するという．普通は 2 次平均収束のことを単に**平均収束**といい

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, f_n(x)=f(x)$$

と書く（記号 l. i. m. は 'limit in mean' と読む）． これに対して，$f_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ および $f(x)$ が可測函数であって

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \qquad (\text{a. e.})$$

なるとき，函数列 $\{f_n\}$ は函数 f に**ほとんどいたる所収束する**という．

特に L^2 においては，補助定理 2 で見たように

$$(f, g)=\int f(x)\overline{g(x)}dx$$

なる量が定義される．これを f と g との**内積**という．有限次元の<u>複素</u>ベクトル空間における内積*)は，$f=(f_1, f_2, \cdots, f_n)$, $g=(g_1, g_2, \cdots, g_n)$ に対して

*) 佐武，前掲書，117—118 頁参照．

$$(f,\ g)=\sum_{j=1}^{n} f_j\overline{g_j}$$

で定義されるが，この右辺の和の項数（すなわちベクトル空間の次元）を限りなく増した場合の極限として，$\sum$ を積分でおきかえたものが L^2 における内積である．この内積も，有限次元の場合と同じく，次の性質をもつことは明らかである：

$$\begin{cases}(f+g,\ h)=(f,\ h)+(g,\ h),\ (\alpha f,\ g)=\alpha(f,\ g),\\ (f,\ g)=\overline{(g,\ f)},\\ (f,\ f)\geqq 0,\ \text{等号は}\ f=0\ \text{のとき，かつそのときにかぎる．}\end{cases}$$

そして $\|f\|_2=\sqrt{(f,\ f)}$ である．これらはいわゆる Hilbert(ヒルベルト)空間を特徴づける性質であるが，そのことについては次の第 VI 章（§27）で述べる．

前の補助定理 3 は $p=1,\ 2$ のときだけ証明したが，実際にはすべての $p\geqq 1$ に対して成立するのだから，そのことを使えば，次の定理 22. 1 の証明は任意の $p\geqq 1$ に対してそのまま通用する．しかし $p=1$ または 2 と思って読まれても，本書においては後で支障は起らない．

定理 22. 1. L^p はノルム $\|\cdot\|_p$ に関して完備である（従って Banach 空間である*)）．

証明. この定理の証明中は，$\|\cdot\|_p$ を $\|\cdot\|$ と書くことにする．$\{f_n\}$ を L^p の中の基本列とする；すなわち

$$\lim_{m,\,n\to\infty}\|f_m-f_n\|=0.$$

このとき $\{f_n\}$ の適当な部分列 $\{f_{n(k)};\ k=1,\ 2,\ \cdots\}$ をとり $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_{n(k)}-f\|=0$ なる $f\in L^p$ の存在を証明すれば

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|f_n-f\|\leqq\lim_{n,k\to\infty}\|f_n-f_{n(k)}\|+\lim_{k\to\infty}\|f_{n(k)}-f\|=0,\text{**)}$$

すなわち $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$ となる．

上のような部分列 $\{f_{n(k)}\}$ は次のようにして作られる．仮定により，まず $n(1)$ を

$$n>n(1)\quad \text{ならば}\quad \|f_n-f_{n(1)}\|<1/2$$

なるようにとれる．次に $n(2)$ を，$n(2)>n(1)$ でしかも

$$n>n(2)\quad \text{ならば}\quad \|f_n-f_{n(2)}\|<1/2^2$$

なるようにとれる．このことをくりかえすと，自然数列 $\{n(k);\ k=1,\ 2,\ \cdots\}$ を

---

*) 完備性以外の Banach 空間の条件は前に述べられている．

**) この不等式は，任意の実数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に対して $\overline{\lim}\,(a_n+b_n)\leqq\overline{\lim}\,a_n+\overline{\lim}\,b_n$ なることと同様にして示される．

$$\begin{cases} n(1)<n(2)<\cdots<n(k)<\cdots, \\ n>n(k) \quad \text{ならば} \quad \|f_n-f_{n(k)}\|<1/2^k \end{cases}$$

なるようにとれる．従って特に

$$\|f_{n(k+1)}-f_{n(k)}\|<1/2^k.$$

以後，記号を簡単にするため，$f_{n(k)}$ を f_k と書くことにすると，上の式から

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_{k+1}-f_k\|<1 \tag{22. 5}$$

となる．これから

$$\lim_{k\to\infty}\|f-f_k\|=0 \tag{22. 6}$$

なる $f\in L^p$ の存在を証明すればよい．いま

$$g_k(x)=|f_1(x)|+\sum_{j=1}^{k-1}|f_{j+1}(x)-f_j(x)|$$

とおくと，$g_k\in L^p$ $(k=1, 2, \cdots)$，$0\leqq g_1(x)\leqq g_2(x)\leqq\cdots\leqq g_k(x)\leqq\cdots$ であり，補助定理 3 と (22. 5) により

$$\|g_k\|\leqq\|f_1\|+\sum_{j=1}^{k}\|f_{j+1}-f_j\|\leqq\|f_1\|+1.$$

だから定理 13. 2 により

$$\int\{\lim_{k\to\infty}g_k(x)^p\}dx=\lim_{k\to\infty}\int g_k(x)^p dx=\lim_{k\to\infty}\|g_k\|^p\leqq(\|f_1\|+1)^p<\infty.$$

だから，ほとんどいたる所有限な $g(x)=\lim_{k\to\infty}g_k(x)$ が存在して $g\in L^p$，$\|g\|\leqq\|f_1\|+1$ となる．従って，

$$f_k(x)=f_1(x)+\sum_{j=1}^{k-1}\{f_{j+1}(x)-f_j(x)\}$$

において，右辺で $k\to\infty$ とした無限級数は $g(x)<\infty$ なる点 x では絶対収束する．だから，ほとんどいたる所有限な $f(x)=\lim_{k\to\infty}f_k(x)$ が存在して $|f(x)|\leqq g(x)$，従って $f\in L^p$ である．また

$$|f(x)-f_k(x)|=\left|\sum_{j=k}^{\infty}\{f_{j+1}(x)-f_j(x)\}\right|\leqq\sum_{j=k}^{\infty}|f_{j+1}(x)-f_j(x)|\leqq g(x)$$

だから $|f(x)-f_k(x)|^p\leqq g(x)^p$．ここで $g(x)^p$ は可積分だから，Lebesgue の項別積分定理（定理 13. 6）により

$$\lim_{k\to\infty}\|f-f_k\|^p=\lim_{k\to\infty}\int|f(x)-f_k(x)|^p dx=\int\lim_{k\to\infty}|f(x)-f_k(x)|^p dx=0;$$

すなわち (22. 6) が示された．（証明終）

注意．函数空間の性質のうち，完備性以外の事項は Riemann 積分の範囲でも話を進められるが，上の完備性の証明において，Lebesgue 積分の特性が本質的にその効果を発揮するのである．そして，この完備性によって函数解析における統一的な深い議論ができるのである．

定理 22. 2. $f_n\in L^p$ $(n=0,1,2,\cdots)$, $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f_0\|_p=0$ ならば，$\{f_n\}$ の適当な部分列 $\{f_{n(k)};\ k=1,2,\cdots\}$ をとって，$\lim_{k\to\infty}f_{n(k)}(x)=f_0(x)$ (a. e.) となるようにできる．

証明．前定理の証明と同じ方法で $\{f_{n(k)};\ k=1,2,\cdots\}$ を作れば，ほとんどいたる所 $f(x)=\lim_{k\to\infty}f_{n(k)}(x)$ が存在して $\lim_{k\to\infty}\|f_{n(k)}-f\|_p=0$ である．このことと仮定とから

$$\|f-f_0\|_p\leqq\lim_{k\to\infty}\{\|f-f_{n(k)}\|_p+\|f_{n(k)}-f_0\|_p\}=0,$$

すなわち $f(x)=f_0(x)$ (a. e.)．だから

$$\lim_{k\to\infty}f_{n(k)}(x)=f_0(x)\ \ (\text{a. e.}).$$

Hölder（ヘルダー）**の不等式と Minkowski**（ミンコウスキ）**の不等式**．$p>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ とすると，任意の $f\in L^p$, $g\in L^q$ に対して

$$\left|\int f(x)g(x)dx\right|\leqq\left\{\int|f(x)|^pdx\right\}^{1/p}\left\{\int|g(x)|^qdx\right\}^{1/q}. \tag{22. 7}$$

これを Hölder の不等式という．$p=2$ のときは Schwarz の不等式である．また $p\geqq1$ なるとき，任意の f, $g\in L^p$ に対して

$$\left\{\int|f(x)+g(x)|^pdx\right\}^{1/p}\leqq\left\{\int|f(x)|^pdx\right\}^{1/p}+\left\{\int|g(x)|^pdx\right\}^{1/p}. \tag{22. 8}$$

これを Minkowski の不等式という．これにより，補助定理 3 がすべての $p\geqq1$ に対して真である．

この二つの不等式を証明する準備として，次のことを証明する：(22. 7) におけるような p, q を与えると，任意の α, $\beta\geqq0$ に対して

$$\alpha\beta\leqq\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}. \tag{22. 9}$$

α または β が 0 ならばこの不等式は明らかであるから，$\alpha\beta\neq0$ として証明すればよい．実変数 $\lambda\geqq0$ の函数 $\varphi(\lambda)=\dfrac{1}{p}\lambda^p+\dfrac{1}{q}-\lambda$ は，$\lambda=1$ のとき最小値 0 をとるから

$$\lambda\leqq\frac{1}{p}\lambda^p+\frac{1}{q}.$$

ここで $\lambda=\alpha\beta^{-q/p}$ とおいて，両辺に β^q をかけると (22. 9) が得られる．

(22. 7) の証明．$\|f\|_p=0$ または $\|g\|_q=0$ ならば $f(x)g(x)=0$ (a. e.) であるから (22. 7) は明らかである．よって $\|f\|_p\neq0$, $\|g\|_q\neq0$ とする．(22. 9) において

$$\alpha=\frac{|f(x)|}{\|f\|_p},\quad \beta=\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

とおいて，両辺を X の上で積分すると

$$\frac{1}{\|f\|_p\cdot\|g\|_q}\int|f(x)g(x)|dx\leqq\frac{1}{p\|f\|_p{}^p}\int|f(x)|^pdx+\frac{1}{q\|g\|_q{}^q}\int|g(x)|^qdx$$
$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

だから

$$\left|\int f(x)g(x)dx\right|\leqq\|f\|_p\cdot\|g\|_q;$$

これは (22. 7) を表わす．

(22. 8) の証明．$p=1$ のときは明らかだから，$p>1$ のときを考える．また $|f(x)+g(x)|\leqq|f(x)|+|g(x)|$ だから，$f(x)\geqq0$, $g(x)\geqq0$ の場合に証明すれば十分である．まず

$$\int\{f(x)+g(x)\}^pdx=\int\{f(x)+g(x)\}^{p-1}f(x)dx+\int\{f(x)+g(x)\}^{p-1}g(x)dx.$$

ここで，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ なる q をとり，右辺の各項に Hölder の不等式 (22. 7) を適用すると，$q=p/(p-1)$ によって

$$\int\{f(x)+g(x)\}^pdx\leqq\left\{\int[f(x)+g(x)]^{(p-1)q}dx\right\}^{1/q}\left\{\int f(x)^pdx\right\}^{1/p}$$
$$+\left\{\int[f(x)+g(x)]^{(p-1)q}dx\right\}^{1/q}\left\{\int g(x)^pdx\right\}^{1/p}$$
$$=\left\{\int[f(x)+g(x)]^pdx\right\}^{1-1/p}(\|f\|_p+\|g\|_p)$$

すなわち

$$\|f+g\|_p{}^p\leqq\|f+g\|_p{}^{p-1}(\|f\|_p+\|g\|_p).$$

$\|f+g\|_p=0$ のときは (22. 8) は自明である．$\|f+g\|_p\neq0$ のときは，上の式の両辺を $\|f+g\|_p{}^{p-1}$ で割れば (22. 8) を得る．

問 1. $\mu(X)<\infty$ ならば $L^2(X)\subset L^1(X)$ である．(Schwarz の不等式を使う——Hölder の不等式を使えば $L^p(X)\subset L^1(X)$ が言える．)

問 2. i) $L^p(X)$ の中で，測度有限な集合の定義函数になるものの全体 $\boldsymbol{E}$ は，ノルム $\|\cdot\|_p$ による距離に関して閉集合をなす．

ii) 上記の閉集合 $\boldsymbol{E}$ を一つの距離空間と考える.*) 任意の $f\in L^1$ を固定し，$\varphi\in\boldsymbol{E}$ に対して

$$F_f(\varphi)=\int_X f(x)\varphi(x)dx$$

と定義すると，F_f は $\boldsymbol{E}$ の上の連続函数である．

（ヒント．i) では定理 22. 2 を使い，ii) では定理 13. 4——不定積分の絶対連続性——を使え．）

---

*) 付録 §4 参照．

§23. 測度空間の上の函数空間——II. 空間 M および S.

測度空間の上に作られる函数空間であって，Banach 空間になるもので，L^p 以外の例として空間 $M(X)$ をあげておこう．まず予備の概念を説明する．

X の上の可測函数 $f(x)$ が**本質的に有界**であるとは，或る正数 α に対して

(23. 1) $$|f(x)|\leqq\alpha \quad (\text{a. e.})$$

となることである．このような α の下限を $|f(x)|$ の**本質的上限**といい，$\operatorname*{ess.sup}_{x\in X}|f(x)|$ で表わす．すなわち，$\text{ess.sup}|f(x)|=a$ ならば

(23. 2) $$\mu(X(|f|>a))=0,$$

(23. 3) $$\text{任意の } b<a \text{ に対して } \mu(X(|f|>b))>0$$

となる．$f(x)$ が本質的に有界でないとき，$\text{ess.sup}|f(x)|$ は ∞ であるという．このときは任意の有限な実数 b に対して $\mu(X(|f|>b))>0$ である．

空間 M. X の上の本質的に有界な函数の全体を $M(X)$ または単に M と書く．ただし $f(x)=g(x)$ (a. e.) ならば $f=g$ とする．$f\in M$ に対して $\|f\|_\infty=\text{ess.sup}|f(x)|$ と定義すると，$\|\cdot\|_\infty$ が前§に述べたノルムの性質を満たし，M が Banach 空間になることは明らかである．

$\mu(X)<\infty$ ならば，すべての $p\geqq1$ に対して $L^p(X)\supset M(X)$ であり，$f_n\in M(X)$ で $\|f_n-f\|_\infty\to0$ $(n\to\infty)$ ならば $\|f_n-f\|_p\to0$ $(n\to\infty)$ となる．なおこの場合に，$\|f\|_\infty$ は後に述べる問 2 の意味で $\lim_{p\to\infty}\|f\|_p$ と考えられる；これが $\|\cdot\|_\infty$ なる記号の使われる理由である．$\mu(X)=\infty$ のときは，$L^p(X)$ と $M(X)$ とは互いに含みも含まれもしないし，L^p における収束すなわち p 次平均収束と，M における収束すなわち測度 0 の集合の上を除いて一様収束することとの関係も不定である．

平均収束や，ほとんどいたる所の収束のほかに，次のような収束の概念も重要である．任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\{x;\ |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0$$

なるとき $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に**漸近収束**する，または**測度収束**するという．この概念はおもに $\mu(X)<\infty$ のときに有用であるから，以後 $\mu(X)<\infty$ とする．特に $\mu(X)=1$ の場合は確率論において重要で，その場合に上の収束を確率収束とも呼ぶ．漸近収束は次の函数空間 $S(X)$ における収束と同等であることを証明しよう（定理 23. 1).

空間 S. $\mu(X)<\infty$ なる X の上でほとんどいたる所有限な値をとる函数の全体において次のように‘準ノルム’ $\|f\|_S$ を定義したものを $S(X)$ または S と書く，ただし $f(x)$

$=g(x)$(a. e.) ならば $f=g$ とする；$f\in S$ に対して

$$\|f\|=\|f\|_S=\int\frac{|f(x)|}{1+|f(x)|}dx \tag{23. 4}$$

とおくと，これは前§に述べたノルムの性質のうち (1)，(3) を満たし，*) (2) は満たさないが，(2) より少し弱い条件

$$\text{(2}'\text{)}\quad \begin{cases}\|-f\|=\|f\|,\\ \alpha_n\to\alpha,\ \|f_n-f\|\to 0 \text{ ならば } \|\alpha_n f_n-\alpha f\|\to 0\end{cases}$$

を満たす．このような $\|f\|$ を**準ノルム**という．このときも $\rho(f,\ g)=\|f-g\|$ は距離の性質をもつ．

定理 23. 1. $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に漸近収束するための必要十分条件は，$\|f_n-f\|_S\to 0$ $(n\to\infty)$ なることである．

証明. 一般に $\alpha\geqq\beta\geqq 0$ ならば

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}-\frac{\beta}{1+\beta}=\frac{\alpha-\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)}\geqq 0$$

であるから，$A_{n\varepsilon}=\{x;\ |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\}$ $(\varepsilon>0)$ とおくと

$$\int_X\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}dx\begin{cases}\geqq\displaystyle\int_{A_{n\varepsilon}}\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}dx\geqq\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\mu(A_{n\varepsilon})\\ =\displaystyle\int_{A_{n\varepsilon}}+\int_{X-A_{n\varepsilon}}\leqq\mu(A_{n\varepsilon})+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\mu(X-A_{n\varepsilon})\end{cases}$$

(下の不等式では，$A_{n\varepsilon}$ においては被積分函数を 1 でおきかえた)．従って

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\mu(A_{n\varepsilon})\leqq\|f_n-f\|_S\leqq\mu(A_{n\varepsilon})+\varepsilon\mu(X). \tag{23. 5}$$

さて $\|f_n-f\|_S\to 0$ とすると，任意の $\varepsilon>0$ に対して (23. 5) の左の不等式によって $\lim_{n\to\infty}\mu(A_{n\varepsilon})=0$ となる．$A_{n\varepsilon}$ の定義により，これは $\{f_n\}$ が f に漸近収束することを意味する．逆に，$\{f_n\}$ が f に漸近収束すれば，(23. 5) の右の不等式により

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|f_n-f\|_S\leqq\varepsilon\mu(X).$$

ここで $\mu(X)$ は有限な一定数であり，ε は任意に小さい正数であるから $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_S=0$ である．

系. $\mu(X)<\infty$, $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ (a. e.) ならば $\{f_n\}$ は f に漸近収束する．

---

*) (3) を満たすことは $\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}\leqq\dfrac{\alpha}{1+\alpha}+\dfrac{\beta}{1+\beta}$ $(\alpha,\ \beta\geqq 0)$ を使って証明できる．

証明. $$\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}<1 \qquad \text{(a.e.)}$$

だから，仮定と Lebesgue の項別積分定理（定理 13. 6 またはその系 2）により $\|f_n-f\|_S \to 0$ である．

定理 23. 2. $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に p 次平均収束するならば，漸近収束する．

証明. 任意の $\varepsilon>0$ に対して，$A_{n\varepsilon}$ を前定理の証明におけるとおりとすると

$$\|f_n-f\|_p{}^p \geqq \int_{A_{n\varepsilon}} |f_n(x)-f(x)|^p dx \geqq \varepsilon^p \mu(A_{n\varepsilon}).$$

だから仮定により $\lim_{n\to\infty}\mu(A_{n\varepsilon})=0$. すなわち $\{f_n\}$ は f に漸近収束する．

定理 23. 3. $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に漸近収束するならば，適当な部分列 $\{f_{n(k)}(x)\}$ が $f(x)$ にほとんどいたる所収束する．

証明. 仮定により任意の $\varepsilon>0$ に対して $\lim_{n\to\infty}\mu(\{x;\ |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0$ だから，$k=1, 2, \cdots$ に対して $n(1)<n(2)<\cdots<n(k)<\cdots$ なる $\{n(k)\}$ を

$$\mu\left(\left\{x;\ |f_{n(k)}(x)-f(x)|>\frac{1}{2^k}\right\}\right)<\frac{1}{2^k}$$

なるようにとれる．今

$$E_k=\left\{x;\ |f_{n(k)}(x)-f(x)|>\frac{1}{2^k}\right\},\quad E=\overline{\lim_{k\to\infty}}\,E_k\equiv\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j>k}E_j$$

とおくと，$x\notin E$ ならば，或る k に対して $x\notin\bigcup_{j>k}E_j$ だから $|f_{n(j)}(x)-f(x)|\leqq 1/2^j$ $(j>k)$. だからその点 x では $\lim_{j\to\infty}f_{n(j)}(x)=f(x)$. ところが

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\infty$$

だから $\mu(E)=0$ (§6, 問 3) である．だから $\lim_{j\to\infty}f_{n(j)}(x)=f(x)$ (a. e.). (証明終)

S は準ノルム $\|\cdot\|_S$ に関して完備である．$\lim_{m,n\to\infty}\|f_m-f_n\|_S=0$ とすると，定理 22. 1 および定理 23. 3 の証明と同じ方法で $\mu(\{x;\ |f_{n(k+1)}(x)-f_{n(k)}(x)|>1/2^k\})<1/2^k$ なる部分列 $\{f_{n(k)}\}$ がとれる．$E_k=\{x;\ |f_{n(k+1)}(x)-f_{n(k)}(x)|>1/2^k\}$ とおくと，定理 23. 3 の証明におけると同様に $\mu(\overline{\lim}\,E_k)=0$ であり，$x\notin\overline{\lim}\,E_k$ ならば

$$f(x)=f_{n(1)}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\{f_{n(k+1)}(x)-f_{n(k)}(x)\}=\lim_{k\to\infty}f_{n(k)}(x)$$

が存在する．従って定理 23. 1 とその系とにより $\|f_{n(k)}-f\|_S\to 0$ $(k\to\infty)$. よって再び定理 22. 1 の証明と同様にして

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|f_n-f\|_S=0$$

を得る．すなわち S は完備である．

一般に準ノルムの定義された線型空間でそのノルムに関して完備なものを **Fréchet** (フレッシェ) 空間という.

問 1. 任意の $p \geqq 1$ に対して $L^1 \frown M \subset L^p$ である. また $f_n \in L^1 \frown M$ $(n=1, 2, \cdots)$, $\sup_{n \geqq 1} \|f_n\|_\infty < \infty$, $f \in L^1$, $\|f_n - f\|_1 \to 0$ $(n \to \infty)$ ならば, 任意の $p > 1$ に対して $f \in L^p \frown M$ で $\|f_n - f\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$.

問 2. $\mu(X) < \infty$ ならば

$$\lim_{p\to\infty}\left\{\int_X |f(x)|^p dx\right\}^{1/p} = \operatorname*{ess.\,sup}_{x \in X} |f(x)|\,;$$

この式は $\operatorname{ess.sup}|f(x)| = \infty$ でもよい. $\operatorname{ess.sup}|f(x)| < \infty$ のときは $\lim_{p\to\infty}\|f\|_p = \|f\|_\infty$ と書ける. (証明には (23. 2), (23. 3) を利用せよ.)

問 3. $\mu(X) < \infty$ であって, $S(X)$ に属する一様有界な函数列 $\{f_n(x)\}$ が或る函数 $f(x)$ に漸近収束するならば, 任意の $p \geqq 1$ に対して $\|f_n - f\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$.

(まず定理 23.1 と定理 23. 3 とを使って $p=1$ の場合を証明し, 次に問 1 を使え.)

§ 24. Euclid 空間の上の函数空間

Euclid 空間 R^N の点 x の座標を $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ で表わし

$$|x| = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_N{}^2}$$

とする. また R^N の上の複素数値函数 $f(x)$ に対して, 集合 $\{x; f(x) \neq 0\}$ の閉包を f の台 (carrier または support) という; 本書においては f の台を $\mathrm{Car}(f)$ と書くことにする.*)

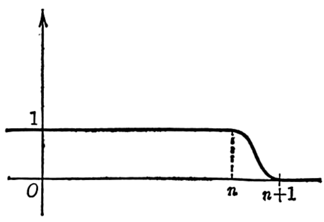
この § においても, § 22 のはじめに述べたように, 函数を実数値のものだけに限って話を進めてもよい.

I. **空間 L.** R^N の上の複素数値連続函数で有界な台をもつもの全体を $L(R^N)$ または L と書く. L は

(24. 1) $$\|f\|_\infty = \max_{x \in R^N} |f(x)|$$

をノルムとして線型ノルム空間になる しかし L は完備ではない; たとえば $h_n(x)$ を

(24. 2) $$\begin{cases} h_n(x) = 1 & (|x| \leqq n) \\ 0 \leqq h_n(x) \leqq 1 & (n < |x| < n+1) \\ h_n(x) = 0 & (|x| \geqq n+1) \end{cases}$$



なる連続函数 (右図) とし,

$$g(x) = (1 + |x|^2)^{-1},$$

$$f_n(x) = g(x) h_n(x)$$

---

*) 函数の台を表わす定った記号はないようである.

と定義すると，$f_n \in L$ $(n=1, 2, \cdots)$ であって

$$m>n \text{ ならば } \|f_m-f_n\|_\infty \leqq (1+n^2)^{-1}$$

だから，$\{f_n\}$ は L の中の基本列をなすが，この函数列は $g(x)$ $(\notin L)$ に一様収束する．

II. **空間** L_∞. R^N の上の複素数値連続函数 $f(x)$ で，任意の $\varepsilon>0$ に対して集合 $\{x;\ |f(x)|\geqq\varepsilon\}$ が有界であるようなもの全体を，$L_\infty(R^N)$ または L_∞ と書く．L_∞ も L と同じく (24. 1) で定義されるノルムによって線型ノルム空間になり，L_∞ は完備である．完備性は，ノルム $\|\cdot\|_\infty$ に関する収束が函数の一様収束であることを使って，容易に証明される．明らかに $L\subset L_\infty$ であるが，さらに次の定理が成立する．

定理 24. 1. L は L_∞ の中でノルム $\|\cdot\|_\infty$ に関して稠密である．

証明. 任意の $f\in L_\infty$ に対して $\lim_{n\to\infty} \sup_{|x|>n} |f(x)|=0$ である．だから，$h_n(x)$ を (24. 2) のような函数として，$f_n(x)=f(x)h_n(x)$ と定義すると，$f_n\in L$ であって

$$\|f_n-f\|_\infty=\sup_{|x|>n}|f(x)|\cdot|h_n(x)-1|\to 0 \quad (n\to\infty).$$

だから L は L_∞ の中で $\|\cdot\|_\infty$ に関して稠密である．

III. **空間** L^p. R^N の上の Lebesgue 測度を μ とし，μ に関する積分を $\int\cdots dx$ と書く．実数 $p\geqq 1$ を固定し，*) μ に関して可測な複素数値函数 $f(x)$ で

$$\int|f(x)|^p dx<\infty \quad (\text{積分範囲が } R^N \text{ のときはそれを省略する})$$

となるものの全体を $L^p(R^N)$または L^p と書く，ただし $f(x)=g(x)$ (a. e.) なら $f=g$ とする（従って定理 11. 1 により，$f(x)$ は Borel 可測としてもよい）．これは §22 で述べた一般の測度空間の上の L^p の特別の場合であるから，§22 の L^p に関する結果はすべて成立する．例えば L^p は

$$\|f\|_p=\left\{\int|f(x)|^p dx\right\}^{1/p}$$

をノルムとして Banach 空間になる．また $L\subset L^p$（集合として）であるが，さらに次の定理が成立する．

定理 24. 2. L は L^p の中でノルム $\|\cdot\|_p$ に関して稠密である．

証明. 任意の $f\in L^p$ に対して，$f=f_1+if_2$ $(f_1(x)=\Re f(x),\ f_2(x)=\Im f(x))$ とすると f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^- はすべて L^p に属する．だから $f\geqq 0$ なる場合にこの定理を証明すればよい．

*) ここでも §22 と同様に，$p=1$ または 2 として読んでもよいが，事実は一般の $p\geqq 1$ で成立する．

$L^p \ni f \geqq 0$ とし，任意の $\varepsilon>0$ をとる．また $S_n=\{x;\ x\in R^N,\ |x|<n\}$ とおく．このとき，$\int |f(x)|^p dx<\infty$ だから，十分大きい n をとれば

$$\int_{R^N-S_n} |f(x)|^p dx<\varepsilon^p.$$

よって

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x) & (x\in S_n) \\ 0 & (x\notin S_n) \end{cases}$$

とおくと

(24. 3)
$$\|f_n-f\|_p=\left\{\int_{R^N-S_n} |f(x)|^p dx\right\}^{1/p}<\varepsilon.$$

またこのとき $f_n(x)\geqq 0$ だから，$f_n(x)$ は負にならない単函数の単調増加列の極限である（定理 10. 1）．だから単函数 $g(x)$ で

$$f_n(x)\geqq g(x)\geqq 0, \quad \int \{f_n(x)-g(x)\}^p dx<\varepsilon^p$$

なるものが存在する，従って

(24. 4)
$$\|f_n-g\|_p<\varepsilon.$$

単函数 $g(x)$ は

(24. 5)
$$g(x)=\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{E_j}(x), \quad \alpha_j>0, \quad E_j\subset S_n,$$

なる形に書ける，ここに $\chi_{E_j}(x)$ は集合 E_j の定義函数である．Lebesgue 測度の性質（定理 7. 4，定理 7. 5）により，各 E_j に対して

(24. 6)
$$F_j\subset E_j\subset G_j, \quad \mu(G_j-F_j)<(\varepsilon/k\alpha_j)^p$$

なる閉集合 F_j と開集合 G_j とが存在する；S_n が開集合だから $G_j\subset S_n (j=1, \cdots, k)$ としてよい．$h_j(x)$ を R^N で $0\leqq h_j(x)\leqq 1$ なる連続函数で

$$F_j \text{ の上で } h_j(x)=1, \quad G_j \text{ の外で } h_j(x)=0$$

なるもの*) とすると，(24. 6) により

$$\int |\chi_{E_j}(x)-h_j(x)|^p dx\leqq \int_{G_j-F_j} 1^p dx=\mu(G_j-F_j)<\left(\frac{\varepsilon}{k\alpha_j}\right)^p,$$

従って

(24. 7)
$$\|\chi_{E_j}-h_j\|_p<\varepsilon/k\alpha_j \qquad (j=1, \cdots, k).$$

だから

---

*) 例えば，付録§3，例 1 のように作ればよい．

$$h(x)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j h_j(x)$$

とおくと，$h\in L$（$\because S_n$ の外では $h(x)=0$）であって，(24. 5)，(24. 7) とノルムの性質により

(24. 8)
$$\|g-h\|_p\leqq\sum_{j=1}^{k}|\alpha_j|\cdot\|\chi_{E_j}-h_j\|_p<\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\frac{\varepsilon}{k\alpha_j}=\varepsilon.$$

(24. 3)，(24. 4)，(24. 8) により $\|f-h\|_p<3\varepsilon$ となる．

定理 24. 3. $f\in L^1$ であって，任意 $h\in L$ に対して $\int f(x)h(x)dx=0$ ならば $f(x)=0$ (a.e.) である．

証明. まず．仮定から

(24. 9)　　任意の有界な $g\in L^1$ に対して $\int f(x)g(x)dx=0$

となることを示そう．そのような g に対して $M=\sup_x|g(x)|$ とおくと，定理 24. 2 により

$$\|h_n-g\|_1\to 0\qquad(n\to\infty)$$

なる $\{h_n\}\subset L$ が存在するが，このとき定理 24. 2 の証明からわかるように，R^N の上で

$$|h_n(x)|\leqq M\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

なるようにすることができる．またそのとき定理 22. 2 により $\{h_n(x)\}$ の適当な部分列は a.e. x で $g(x)$ に収束するから，はじめからその部分列だけを考えることにすれば

$$\lim_{n\to\infty}f(x)h_n(x)=f(x)g(x)\qquad(\text{a.e.}).$$

そして $|f(x)h_n(x)|\leqq M|f(x)|$, $f\in L^1$ であるから，Lebesgue の収束定理 13. 6 と今の定理の仮定によって

$$\int f(x)g(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int f(x)h_n(x)dx=0;$$

すなわち (24. 9) が示された．次に S_n を前定理 24. 2 の証明に述べたとおりとして

$$g_n(x)=\begin{cases}\overline{f(x)}/|f(x)| & (x\in S_n(0<|f|<n)\text{ のとき})\\ 0 & (\text{その他の } x\text{ で})\end{cases}$$

とおくと (24. 9) により

$$\int f(x)g_n(x)dx=0$$

である．ところが

$$f(x)g_n(x)=\begin{cases}|f(x)| & (x\in S_n(0<|f|<n)\text{ のとき})\\ 0 & (\text{その他の } x \text{ で})\end{cases}$$

であるから，$\{f(x)g_n(x)\}$ は n について単調増加で $|f(x)|$ に近づく．だから定理 13.2 により

$$\int|f(x)|dx=\lim_{n\to\infty}\int f(x)g_n(x)dx=0,$$

従って $f(x)=0$ (a. e.) となる．(証明終)

上の定理は任意の L^p で成立する．すなわち

定理 24. 3′. $f\in L^p\ (p\geqq 1)$ であって，任意の $h\in L$ に対して $\int f(x)h(x)dx=0$ ならば $f(x)=0$ (a. e.).

証明は $p>1$ の場合にすればよい．まず $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ なる q をとるとき

(24. 9′)　　任意の $g\in L^q$ に対して $\int f(x)g(x)dx=0$

となることを示そう．定理 24. 2 により $\|h_n-g\|_q\to 0\ (n\to\infty)$ なる $\{h_n\}\subset L$ をとると，Hölder の不等式 (22. 7) によって

$$\left|\int f(x)g(x)dx-\int f(x)h_n(x)dx\right|\leqq\|f\|_p\|g-h_n\|_q\to 0\qquad(n\to\infty)$$

となるから，定理の仮定によって (24. 9′) が得られる．次に

$$g(x)=\begin{cases}|f(x)|^{p-2}\overline{f(x)} & (f(x)\neq 0\text{ のとき})\\ 0 & (f(x)=0\text{ のとき})\end{cases}$$

と定義すると，$f(x)g(x)=|f(x)|^p$ であり，また

$$|g(x)|^q=|f(x)|^{(p-1)q}=|f(x)|^p$$

によって $g\in L^q$ であるから，(24. 9′) により

$$\int|f(x)|^p dx=\int f(x)g(x)dx=0,$$

従って $f(x)=0$ (a. e.) となる．(証明終)

$p=2$ の場合は，上の証明の前半で Hölder の不等式を使う所は Schwarz の不等式でよいわけであり，後半では $g(x)=\overline{f(x)}$ とすればよいから簡単である．なお $p>2$ ならば，後半の $g(x)$ の定義は $g(x)=|f(x)|^{p-2}\overline{f(x)}$ だけでよい．

次に L^1 における**合成積**または**たたみ込み** (convolution)*) と呼ばれる算法を定義しよう．$f,\ g\in L^1$ に対して

(24. 10)　　$h(x)=\int f(x-y)g(y)\,dy=\int g(x-y)f(y)dy$

---

*) 普通 ‘convolution’ と原語のまま呼ばれている．

がほとんどすべての x で有限な値をとり $h\in L^1$ である (§15, 問 4). この h を f と g との合成積またはたたみ込みといい，本書では $f\otimes g$ と書くことにする ($f*g$ と書いた書物もある). このとき

$$\|f\otimes g\|_1\leqq\|f\|_1\cdot\|g\|_1$$

なることも容易に証明される (§15 問 4 の解答参照).

f, g が L^1 に属しないときでも，(24. 10) の積分がほとんどすべての x に対して有限な値をとるとき，それで定義される x の函数を f と g との合成積またはたたみ込みといい $f\otimes g$ と書く. 例えば f, $g\in L$ ならば $f\otimes g$ が存在して有界なことは，Schwarz の不等式によって容易にわかる. また $f\in L^1$ で g が有界ならば $f\otimes g$ が存在することは明らかである. なお次の定理およびその証明法も重要であるが，本書では以後このことを応用する機会はないから，最初は証明を読まずに先へ進まれてもよい.

定理 24. 4. $f\in L^2$, $g\in L^1$ ならば，$f\otimes g\in L^2$ で $\|f\otimes g\|_2\leqq\|f\|_2\cdot\|g\|_1$.

証明. $|f(x-y)g(y)|=|f(x-y)||g(y)|^{1/2}\cdot|g(y)|^{1/2}$ と考えて，Schwarz の不等式を使うために次の評価をする. まず仮定により

$$\int\left\{|g(y)|^{1/2}\right\}^2dy=\|g\|_1<\infty.$$

また Fubini の定理を使って

$$\text{(24. 11)}\quad \int dx\int\left\{|f(x-y)||g(y)|^{1/2}\right\}^2dy=\int\left\{\int|f(x-y)|^2dx\right\}|g(y)|dy$$
$$=\|f\|_2{}^2\int|g(y)|dy=\|f\|_2{}^2\cdot\|g\|_1<\infty$$

となるから，ほとんどすべての x に対して

$$\int\left\{|f(x-y)||g(y)|^{1/2}\right\}^2dy<\infty.$$

だから Schwarz の不等式により，ほとんどすべての x に対して

$$\left|\int f(x-y)g(y)dy\right|^2\leqq\left\{\int|f(x-y)||g(y)|^{1/2}\cdot|g(y)|^{1/2}dy\right\}^2$$
$$\leqq\left\{\int|f(x-y)|^2|g(y)|dy\right\}\|g\|_1<\infty.$$

従って $f\otimes g(x)$ が定義せられ，上の式と (24. 11) により

$$\int|f\otimes g(x)|^2dx\leqq\|f\|_2{}^2\cdot\|g\|_1{}^2,$$

すなわち $f\otimes g\in L^2$, $\|f\otimes g\|_2\leqq\|f\|_2\cdot\|g\|_1$ が示された.

問 1. $\mathrm{Car}(f)$, $\mathrm{Car}(g)$ がともに有界で，$f\otimes g$ が定義されるならば，$\mathrm{Car}(f\otimes g)$ も有界である．

問 2. L^1 に属する g で，任意の $f\in L^1$ に対して $f\otimes g=f$ となるようなものは，存在しない．(そのような g があれば有界な f に対して $f\otimes g$ が連続になる——§21 問 1.)

Euclid 空間 R^N 全体でなく，その部分集合 X において Lebesgue 測度を考えて，その上の L^p を考えることもできる．特に $X=R^1$, $X=(a, b)\subset R^1$ $(-\infty<a<b<\infty)$, $X=(a, \infty)\subset R^1$ などの上で 1 次元 Lebesgue 測度を考えた場合の $L^p(X)$ を，それぞれ

$$L^p(-\infty, \infty),\ L^p(a, b),\ L^p(a, \infty)$$

などで表わす．また有限な閉区間 $[a, b]$ の上で連続な函数の全体を $C[a, b]$ と書く．$C[a, b]$ は，ノルムを

$$\|f\|=\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|$$

で定義することにより，Banach 空間になる．($\|f_m-f_n\|\to 0$ $(m, n\to\infty)$ ならば，函数列 $\{f_n(x)\}$ は閉区間 $[a, b]$ で一様収束するから，その極限函数も $[a, b]$ で連続である．このことにより，$C[a, b]$ の完備なことがわかる．)

任意の $p\geqq 1$ に対して，$C[a, b]$ は $L^p(a, b)$ の部分集合と考えられるが，次の定理 24. 2′ は，定理 24. 2 とまったく同様にして証明できる：

定理 24. 2′. $f(a)=f(b)=0$ なる $f\in C[a, b]$ の全体は，$L^p(a, b)$ の中でノルム $\|\cdot\|_p$ に関して稠密である．

次の定理は **Weierstrass**(ワイエルストラス)**の多項式近似定理**と呼ばれ，これも応用上重要である．

定理 24. 5. x の多項式の全体は $C[a, b]$ の中でノルム $\|\cdot\|$ に関して稠密である——すなわち，有限な閉区間 $[a, b]$ の上の任意の連続函数は多項式で一様に近似される．

証明. まず $t>0$, $-\infty<x<\infty$ に対して

$$K(t, x)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/t}\equiv\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\cdot\frac{x^{2\nu}}{t^\nu},$$

$$K_n(t, x)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\cdot\frac{x^{2\nu}}{t^\nu}\qquad(n=1, 2, \cdots)$$

とおく．$K(t, x)$ は，任意の $\delta>0$ に対して

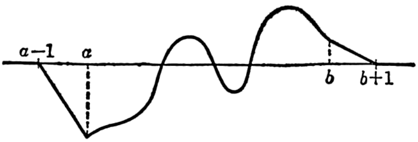
$$\lim_{t\downarrow 0}\int_{|x|\geq\delta}K(t, x)dx=\lim_{t\downarrow 0}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\delta/\sqrt{t}}^{\infty}e^{-y^2}dy=0$$

を満たす．さて閉区間 $[a, b]$ の上の連続函数 $f(x)$ は，$(-\infty, \infty)$ で連続で

$$x<a-1 \text{ または } x>b+1 \text{ ならば } f(x)=0$$

なる函数に拡張される（下図参照）．このとき $f(x)$ は $(-\infty,\ \infty)$ で一様連続であり，また有界（$|f(x)|\leqq M$）となる．

ここで



$$f_t(x)=\int_{-\infty}^{\infty}K(t,\ x-y)f(y)dy$$

$$f_{t,n}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}K_n(t,\ x-y)f(y)dy$$

と定義すると，$f_{t,n}(x)$ が x の多項式になることは，$K_n(t, x)$ の定義から明らかである．だから，

任意の $\varepsilon>0$ に対して次の i), ii) が成立することを証明すればよい：

i) 適当な $t>0$ をとれば，任意の $x\in[a,\ b]$ に対して $|f(x)-f_t(x)|<\varepsilon$ となる；

ii) 任意の $t>0$ を固定するとき，適当な n をとれば，任意の $x\in[a,\ b]$ に対して $|f_t(x)-f_{t,n}(x)|<\varepsilon$ となる．

i) の証明．$f(x)$ は $(-\infty,\ \infty)$ で一様連続だから，適当な $\delta>0$ をとると

$$|x-y|<\delta \text{ ならば } |f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$$

となる．この $\delta>0$ に対して，はじめに述べた $K(t,\ x)$ の性質により，適当な $t>0$ をとれば任意の x に対して

$$\int_{|x-y|\geqq\delta}K(t,\ x-y)dy<\frac{\varepsilon}{4M}$$

となる．一方 $\int_{-\infty}^{\infty}K(t,\ x-y)dy=1$ だから，上のような t をとれば，任意の $x\in[a,\ b]$ に対して

$$|f(x)-f_t(x)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}K(t,\ x-y)\{f(x)-f(y)\}dy\right|$$

$$\leqq\left\{\int_{|x-y|<\delta}+\int_{|x-y|\geqq\delta}\right\}K(t,\ x-y)|f(x)-f(y)|dy$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}\int_{|x-y|<\delta}K(t,\ x-y)dy+2M\int_{|x-y|\geqq\delta}K(t,\ x-y)dy\leqq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

ii) の証明．拡張された $f(x)$ の定義により，$f_t(x)$ と $f_{t,n}(x)$ とを定義する式の積分範囲は $(a-1,\ b+1)$ としてよい．$y\in(a-1,\ b+1)$，$x\in[a,\ b]$ ならば，$|x-y|<b-a+1$ だから，任意の $t>0$ を固定するとき，適当な n をとれば

$$|K(t,\ x-y)-K_n(t,\ x-y)|\leqq\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\cdot\frac{(b-a+1)^{2\nu}}{t^\nu}<\frac{\varepsilon}{M(b-a+2)}$$

となる．だから任意の $x\in[a, b]$ に対して

$$|f_t(x)-f_{t,n}(x)|\leqq\int_{a-1}^{b+1}|K(t, x-y)-K_n(t, x-y)|\cdot|f(y)|dy<\varepsilon.$$

系. x の多項式の全体は $L^2(a, b)$ の中でノルム $\|\cdot\|_2$ に関して稠密である．

証明. 任意の $f\in L^2(a, b)$ と任意の $\varepsilon>0$ に対して，定理 24. 2′ により $\|f-g\|_2<\varepsilon/2$ となるような $g\in C[a, b]$ が存在する．この g に対して定理 24. 5 により，任意の $x\in[a, b]$ に対して一様に $|g(x)-P(x)|<\varepsilon/2\sqrt{b-a}$ となるような多項式 $P(x)$ が存在する．このとき $\|g-P\|_2=\left\{\int_a^b|g(x)-P(x)|^2dx\right\}^{1/2}<\varepsilon/2$ であるから

$$\|f-P\|_2\leqq\|f-g\|_2+\|g-P\|_2<\varepsilon$$

となる．(証明終)

前§の $M(X)$, $S(X)$ の特別な場合として，R^N における Lebesgue 測度 μ を考えて $X\subset R^N$ なる場合 ($S(X)$ に対しては $\mu(X)<\infty$ とする) も考えられるが，前§の一般論に含まれない R^N 特有の性質としてここに述べるほどの事項はないから，特に項目を設けないことにする．次に述べる空間 $\mathfrak{S}$ の定義には，Euclid 空間の座標が使われる．

IV. **空間 $\mathfrak{S}$**. Euclid 空間 R^N において，負でない整数の N 項系列 $p=(p_1, \cdots, p_N)$ に対して，**偏微分演算子** D^p を

$$D^p=\frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1{}^{p_1}\cdots\partial x_N{}^{p_N}},\quad \text{ただし } |p|=p_1+\cdots+p_N,$$

により定義する．例えば R^3 において，$p=(3, 0, 2)$ に対しては

$$D^pf(x)=\frac{\partial^5 f(x)}{\partial x_1{}^3\partial x_3{}^2}\qquad (x=(x_1, x_2, x_3))$$

である．R^N の上の無限回連続微分可能な函数 $f(x)$ が**急減少**であるとは，任意の D^p と任意の自然数 m に対して

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^m|D^pf(x)|=0 \tag{24. 12}$$

となることである．このような函数の全体を $\mathfrak{S}(R^N)$ または $\mathfrak{S}$ と書く．特に，無限回連続微分可能で有界な台をもつ函数 (そのようなものの存在は後の例 2 参照) は $\mathfrak{S}$ に属する．$\mathfrak{S}$ は明らかに線型空間をなしている．

次の問は $\mathfrak{S}$ の定義から容易に証明できる：

問 3. $f\in\mathfrak{S}$ ならば，任意の D^p と任意の多項式 $P(x)$ に対して $P(x)D^pf(x)\in\mathfrak{S}$.

例 1. $P(x)$ を $x=(x_1, \cdots, x_N)$ の任意の多項式とするとき，$f(x)=e^{-|x|^2}P(x)$ は $\mathfrak{S}$ に属する．なぜならば，任意の D^p に対して $D^pf(x)$ は $e^{-|x|^2}Q(x)$ ($Q(x)$は多項式) と

いう形になるから，$f(x)$は (24. 12) を満たす．一方 $g(x)=e^{-|x|^2}\sin(e^{|x|^2})$ は，すべての m に対して $\lim_{|x|\to\infty}|x|^m|g(x)|=0$ ではあるが，$\lim_{|x|\to\infty}|\partial g(x)/\partial x_1|=0$ とはならないから，$\mathfrak{S}$ には属しない．

例 2. 正数 δ に対して $U_\delta=\{x;\ |x|<\delta\}$ とおき，

$$f_\delta(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{\delta^2-|x|^2}\right) & (x\in U_\delta)\\ 0 & (x\notin U_\delta)\end{cases}$$

と定義すると，$f_\delta(x)$ は R^N で無限回連続偏微分可能で $\mathrm{Car}(f_\delta)=\bar{U}_\delta$，従って $f_\delta\in\mathfrak{S}$．また R^N の上で $f_\delta(x)\geqq 0$，特に $f(0)>0$．従って $N_\delta=\int f_\delta(x)dx$ は正であるから，

$$h_\delta(x)=f_\delta(x)/N_\delta$$

とおくと

$$\text{(24. 13)}\qquad \begin{cases}h_\delta\in\mathfrak{S},\ \ \mathrm{Car}(h_\delta)=\bar{U}_\delta,\\ h_\delta(x)\geqq 0,\ \ \displaystyle\int h_\delta(x)dx=1.\end{cases}$$

これらの $h_\delta(x)$ の性質は，以下に述べる $\mathfrak{S}$ と L_∞，L^p との関係を示すのに有用である．

定理 24. 6. 任意の $p\geqq 1$ に対して

i) $\mathfrak{S}\subset L_\infty\cap L^p$.

ii) $\mathfrak{S}$ は L_∞ の中でノルム $\|\cdot\|_\infty$ に関して稠密である．

iii) $\mathfrak{S}$ は L^p の中でノルム $\|\cdot\|_p$ に関して稠密である．

証明. i) $f\in\mathfrak{S}$ ならば，$\mathfrak{S}$ の定義により $|x|$ が十分大きいかぎり $|f(x)|<|x|^{-(N+1)}$ であり，また任意の有界集合の上で $f(x)$ は有界であるから，$f\in L_\infty$，$f\in L^p$ はともに明らかである．

ii)，iii) の証明には，次の二つの補助定理を証明すればよい．すなわち，ii) は下の補助定理 1 および 2 の i) と定理 24. 1 とから明らかであり，iii) は下の補助定理 1 および 2 の ii) と定理 24. 2 とから明らかとなる．

補助定理 1. $f\in L$，$\varphi\in\mathfrak{S}$ ならば，$\varphi\otimes f\in\mathfrak{S}$.

証明. $g=\varphi\otimes f$ とおく．$F=\mathrm{Car}(f)$ は有界集合で

$$g(x)=\int_F\varphi(x-y)f(y)dy$$

と書けるから，任意の D^p に対して

$$D^pg(x)=\int_F D^p\varphi(x-y)f(y)dy.$$

従って，任意の自然数 m に対して

$$|x|^m|D^p g(x)|\leqq\int_F |x|^m|D^p\varphi(x-y)||f(y)|dy.$$

ところが，$y\in F$ で $|x-y|>1$ ならば

$$|x|^m\leqq(|x-y|+|y|)^m\leqq K|x-y|^m \qquad (K \text{ は } m \text{ と } F \text{ とによって定まる正数})$$

だから，$\psi(x)=|x|^m|D^p\varphi(x)|$ とおくと，$|x|$ が十分大きいかぎり

$$|x|^m|D^p g(x)|\leqq\int_F K|\psi(x-y)||f(y)|dy.$$

ここで $D^p\varphi\in\mathfrak{S}$ （問3）だから，任意に固定した $y\in F$ に対して $\lim_{|x|\to\infty}|\psi(x-y)|=0$ であり，また $|\psi(x-y)||f(y)|$ は有界で $\mu(F)<\infty$ だから

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^m|D^p g(x)|\leqq\int_F \lim_{|x|\to\infty}K|\psi(x-y)||f(y)|dy=0.$$

よって $g\in\mathfrak{S}$ である．

補助定理 2. h_δ を例2で与えた函数とし，$f\in L$ とすると

i) $\lim_{\delta\downarrow 0}\|h_\delta\otimes f-f\|_\infty=0,$

ii) $\lim_{\delta\downarrow 0}\|h_\delta\otimes f-f\|_p=0 \quad (p\geqq 1).$

証明. i) $f\in L$ は R^N で一様連続であるから，任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta_\varepsilon>0$ が存在して

(24. 14) $|y|<\delta_\varepsilon$ ならば，すべての $x\in R^N$ に対して $|f(x-y)-f(x)|<\varepsilon$.

また $U_\delta=\{y;\ |y|<\delta\}$ とすると，

(24. 15) $$h_\delta\otimes f(x)=f\otimes h_\delta(x)=\int_{U_\delta}f(x-y)h_\delta(y)dy.$$

一方 (23. 13) により $h_\delta(x)\geqq 0$ であって，$f(x)=\int_{U_\delta}f(x)h_\delta(y)dy$ と書ける．だから $\delta<\delta_\varepsilon$ ならば，(23. 14) によりすべての $x\in R^N$ に対して

$$|h_\delta\otimes f(x)-f(x)|\leqq\int_{U_\delta}|f(x-y)-f(x)||h_\delta(y)|dy<\varepsilon\int_{U_\delta}h_\delta(y)dy=\varepsilon$$

となり，i) が証明された．

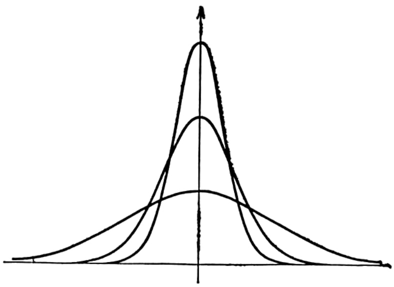
ii) $S_n=\{x;\ |x|<n\}$ とおくと，$\mathrm{Car}(f)\subset S_n$ なる n がある．従って，$\delta<1$ ならば $\mathrm{Car}(h_\delta\otimes f)\subset S_{n+1}$ となる.*) だから

*) このことは，本§問1の証明（巻末）を見れば，容易にわかる．

$$\|h_\delta\otimes f-f\|_p=\left\{\int_{S_{n+1}}|h_\delta\otimes f(x)-f(x)|^p dx\right\}^{1/p}\leqq\mu(S_{n+1})^{1/p}\|h_\delta\otimes f-f\|_\infty.$$

このことと上に証明した i) によって ii) の成立することがわかる．（証明終）

(24. 15) からわかるように，$h_\delta\otimes f$ $(=f\otimes h_\delta)$ は，f の変数を y だけ移動したものに $h_\delta(y)$ の‘重み’をかけて‘平均’したもの $\left(\int h_\delta(y)dy=1\right.$ だから$\left.\right)$ である．δ が小さいほど重み $h_\delta(y)$ の分布は原点の近くに集中するから，$\delta\downarrow 0$ のとき $h_\delta\otimes f(x)$ はもとの函数 $f(x)$ に近づくのである．定理 24. 5 の証明に使った $K(t,\ x)$ も同様な性質をもつ；$K(t,\ x)$ の台（x の函数として）は有界ではないけれども，定理 24. 5 の証明の中で示したように，任意の $\delta>0$ に対して，原点の δ-近傍の外での積分が t とともに 0 に近づくから，重みの分布が原点に集中して行くことは同じである．定理 24. 5 の証明中の i) の証明と上の補助定理 2 の i) の証明とは（前者においては δ-近傍の外の積分の項があるだけで）本質的には同じである．前者では $K\otimes f$ の形のままで扱い，後者では $\otimes$ の順序を変えて $f\otimes h_\delta$ の形にしてあるので，見かけの上で異なる式が書いてあるが，どちらがわかりよいかは各人の好みによるであろうから，ここでは読者諸氏に比較していただくために，別の方法で書いておいた．



問 4. $f\in L^1$ であって，任意の $g\in\mathfrak{S}$ に対して $\int_{R^N}f(x)g(x)dx=0$ ならば，$f(x)=0$ (a. e.) である．（定理 24. 6 の ii) と定理 24. 3 を使え.）

問 5. $f(x)$ が R^N で有界連続なとき，i) R^N の上で $g(x)\geqq 0$ なる任意の $g\in\mathfrak{S}$ に対して $\int_{R^N}f(x)g(x)dx\geqq 0$ ならば $f(x)\geqq 0$ である；ii) 任意の $g\in\mathfrak{S}$ に対して $\int_{R^N}f(x)g(x)dx=0$ ならば $f(x)\equiv 0$ である．

§25. 線型作用素，線型汎函数

$\boldsymbol{E}$ を線型空間，$\boldsymbol{E}_0$ をその部分集合とする．$\boldsymbol{E}_0$ が $\boldsymbol{E}$ の **（線型）部分空間** であるとは

(25. 1)　$\begin{cases} f,\ g\in\boldsymbol{E}_0 \text{ ならば，任意の複素数 } \alpha,\ \beta \text{ に対して} \\ \alpha f+\beta g\in\boldsymbol{E}_0 \end{cases}$

となることである．たとえば，前の § で述べたところの，Euclid 空間 R^N の上での L

は L^p の線型部分空間である.

次に $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}_1$ を線型空間とする. $\boldsymbol{E}$ の線型部分空間 $\boldsymbol{E}_0$ から $\boldsymbol{E}_1$ の中への写像 T が定義されていて

$$(25.\ 2)\qquad \begin{cases} \text{任意の } f,\ g \in \boldsymbol{E}_0 \text{ と任意の複素数 } \alpha,\ \beta \text{ に対して}^{*)} \\ T(\alpha f+\beta g)=\alpha Tf+\beta Tg \end{cases}$$

となるとき, T を $\boldsymbol{E}_0$ で定義された**線型作用素**(または**加法的作用素**)**) といい, $\boldsymbol{E}_0$ を T の**定義域**と呼んで $\boldsymbol{D}(T)$ と書く. また集合 $\{Tf;\ f\in\boldsymbol{D}(T)\}(\subset\boldsymbol{E}_1)$ を T の**値域**と呼んで $\boldsymbol{R}(T)$ と書く. 特に $\boldsymbol{E}_1$ が複素数の全体 $\boldsymbol{C}$ のときには T を**線型汎函数**(または**加法的汎函数**)という. たとえば前の§で述べた偏微分演算子 D^p は $\mathfrak{S}$ を定義域とし, 値域が $\mathfrak{S}$ に含まれる線型作用素である.

なお一般に, 函数空間の上で定義された実数値または複素数値函数のことを**汎函数**という(線型でなくてもよい).

上に述べたような T を '加法的作用素' と呼び, '線型' という形容詞をすぐ後に述べる '連続な' 加法的作用素の意味にだけ使ってある書物もあるが, 本書では '線型' を代数的な線型 (linear) の意味に使うことにする. (汎函数についても同様.)

上の定義において $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}_1$ が線型ノルム空間の場合には, ノルムによる距離 (§22) の意味での T の連続性が考えられる. すなわち, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}_1$ におけるノルムをそれぞれ $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$ で表わすとき, $\boldsymbol{D}(T)\subset\boldsymbol{E}$ から $\boldsymbol{E}_1$ の中への線型作用素 T が**連続**であるとは

$$(25.\ 3)\qquad \begin{cases} f_n\in\boldsymbol{D}(T)\quad (n=1,\ 2,\ \cdots),\ f\in\boldsymbol{D}(T),\ \lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0 \\ \text{ならば } \lim\limits_{n\to\infty}\|Tf_n-Tf\|_1=0 \end{cases}$$

となることである. このとき次の定理が成立する.

定理 25. 1. $\boldsymbol{D}(T)\subset\boldsymbol{E}$ から $\boldsymbol{E}_1$ の中への線型作用素 T が連続であるための必要十分条件は

$$(25.\ 4)\qquad \begin{cases} \text{或る有限な数 } \beta \text{ が存在して, すべての } f\in\boldsymbol{D}(T) \text{ に対して} \\ \|Tf\|_1\leqq\beta\|f\| \end{cases}$$

が成立することである.

証明. 十分なことは $\|Tf_n-Tf\|_1=\|T(f_n-f)\|_1\leqq\beta\|f_n-f\|$ によって明らかである. 必要なこと. (25. 4) を否定すると, 任意の自然数 n に対して $\|Tf_n\|_1>n\|f_n\|$ となる f_n

---

*) このとき (25. 1) によって $\alpha f+\beta g\in\boldsymbol{E}_0$ となるから $T(\alpha f+\beta g)$ が考えられる.

**) 代数学で一次写像または線型写像と呼ぶものと同じであるが, 函数解析学においては作用素(または演算子)と呼ぶ.

$\in D(T)$が存在する；このとき$f_n \neq 0$，従って$\|f_n\|>0$である（$f_n=0$ならば$\|Tf_n\|_1=0=n\|f_n\|$となる）．よって

$$g_n=\frac{1}{n\|f_n\|}f_n \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

とおくと，$\|g_n\|=\dfrac{1}{n}\to 0$ $(n\to\infty)$ だから T の連続性により $\|Tg_n\|_1\to 0$ であるが，一方 f_n のとり方により $\|Tg_n\|_1=\|Tf_n\|_1/n\|f_n\|>1$ となるから矛盾である．（証明終）

この定理の条件（25. 4）が

$$(25.\ 5)\qquad \begin{cases}\text{集合 } A\subset D(T) \text{ が有界ならば，集合 } B=\{Tf;\ f\in A\} \text{ も}\\ \text{有界である}\end{cases}$$

という条件と同等であることは，（25. 2）を使って容易に証明される．すなわち，連続な線型作用素は有界な集合を有界な集合に写す．だから連続な線型作用素のことを**有界線型作用素**ともいう．有界線型作用素 T に対して，（25. 4）が成立するような β の下限を $\|T\|$ と書き T の**ノルム**と呼ぶ．このとき明らかに

$$(25.\ 6)\qquad \begin{cases}\|Tf\|_1\leqq\|T\|\cdot\|f\| \qquad (f\in D(T))\\ \|T\|=\sup\limits_{\substack{f\in D(T)\\ \|f\|\leqq 1}}\|Tf\|_1=\sup\limits_{\substack{f\in D(T)\\ \|f\|=1}}\|Tf\|_1.\end{cases}$$

問 1. 上の（25. 6）を証明せよ．

問 2. （25. 4）と（25. 5）が同等なことを証明せよ．

定理 25. 2. E, E_1 は線型ノルム空間であって，E_1 は完備（従って Banach 空間）であるとし，E_0 を E の中で稠密な線型部分空間とする．このとき $D(T)=E_0$, $R(T)\subset E_1$ なる有界線型作用素 T は $D(\tilde{T})=E$, $R(\tilde{T})\subset E_1$ なる有界線型作用素 $\tilde{T}$ に一意的に拡張されて，$\|\tilde{T}\|=\|T\|$ である．

証明. E_0 が E で稠密だから，任意の $f\in E$ に対して $\|f_n-f\|\to 0$ $(n\to\infty)$ なる $\{f_n\}\subset E_0$ が存在する．このとき（25. 6）により

$$\begin{aligned}\|Tf_m-Tf_n\|_1&\leqq\|T\|\cdot\|f_m-f_n\|\\ &\leqq\|T\|\{\|f_m-f\|+\|f-f_n\|\}\to 0 \qquad (m,\ n\to\infty)\end{aligned}$$

だから，$\{Tf_n\}$ は E_1 の中の基本列をなす．だから E_1 が完備なことにより $h=\lim\limits_{n\to\infty}Tf_n$ が存在する．この h は f だけによって定まり，f に近づく $\{f_n\}\subset E_0$ のとり方には無関係である．なぜならば，別に $\{f_n'\}\subset E_0$, $\|f_n'-f\|\to 0$ $(n\to\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty}Tf_n'=h'$ とすると，

$$\begin{aligned}\|h-h'\|_1&\leqq\|h-Tf_n\|_1+\|Tf_n-Tf_n'\|_1+\|Tf_n'-h'\|_1\\ &\leqq\|h-Tf_n\|_1+\|T\|(\|f_n-f\|+\|f-f_n'\|)+\|Tf_n'-h'\|_1\end{aligned}$$

において $n\to\infty$ として $\|h-h'\|_1=0$, すなわち $h=h'$ となるからである. よって, はじめの $f\in \boldsymbol{E}$ に上のような h を対応させる対応を $\tilde{T}$ とする. このとき; ——

i) $\boldsymbol{D}(\tilde{T})=\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{R}(\tilde{T})\subset \boldsymbol{E}_1$ なることは $\tilde{T}$ の定義から明らかである.

ii) $\tilde{T}$ は線型作用素である. なぜならば, 任意の f, $g\in \boldsymbol{E}$, 任意の複素数 α, β に対して $\|f_n-f\|\to 0$, $\|g_n-g\|\to 0(n\to\infty)$ なる $\{f_n\}, \{g_n\}\subset \boldsymbol{E}_0$ をとれば $\alpha f_n+\beta g_n\in \boldsymbol{E}_0$, $\|(\alpha f_n+\beta g_n)-(\alpha f+\beta g)\|\to 0$ であるから,

$$T(\alpha f_n+\beta g_n)=\alpha Tf_n+\beta Tg_n$$

において $n\to\infty$ とすれば, $\tilde{T}$ の定義により $\tilde{T}(\alpha f+\beta g)=\alpha\tilde{T}f+\beta\tilde{T}g$.

iii) $\tilde{T}$ は T の拡張である. それは, $f\in \boldsymbol{E}_0$ ならば, すべての n に対して $f_n=f$ とおけば $\tilde{T}f=\lim\limits_{n\to\infty} Tf_n=Tf$ となるからである.

iv) $\|\tilde{T}\|=\|T\|$ の証明. $\|f\|=1$ なる任意の $f\in \boldsymbol{E}$ に対して, $\|f_n-f\|\to 0$ なる $\{f_n\}\subset \boldsymbol{E}_0$ をとると, $\|f_n\|\to\|f\|=1$ である. だから (25. 6) によって, $\|Tf_n\|_1\leqq\|T\|\cdot\|f_n\|$ において $n\to\infty$ として $\|\tilde{T}f\|_1\leqq\|T\|$, 従って $\|\tilde{T}\|\leqq\|T\|$. 一方 (25. 6) により

$$\|\tilde{T}\|=\sup_{\substack{f\in \boldsymbol{E}\\ \|f\|=1}}\|\tilde{T}f\|_1\geqq^{*)}\sup_{\substack{f\in \boldsymbol{E}_0\\ \|f\|=1}}\|Tf\|_1=\|T\|.$$

よって $\|\tilde{T}\|=\|T\|$ である.

v) 最後に拡張 $\tilde{T}$ の一意性は, 最初の $h=h'$ の証明と同様にして証明できるから, これで定理 2 の証明が終った.

線型汎函数は線型作用素の特別のものだから, 以上のことは線型汎函数についても成立する (定理 25. 2 で $\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{C}$ のときは, その完備性はたしかに満たされている).

例 1. 前の§で述べた Euclid 空間 R^N の上の函数空間 $\mathfrak{S}$ は, 函数空間 L^p の線型部分空間であり, L^p のノルムに関して稠密である (定理 24. 6). 偏微分作用素 $D=D^q$ $(q=(q_1, \cdots, q_N))$ は $\boldsymbol{D}(D)=\mathfrak{S}$, $\boldsymbol{R}(D)\subset L^p$ (実は $\subset\mathfrak{S}$) なる線型作用素であるが, L^p のノルムについて有界ではない. 従って L^p 全体で定義された有界線型作用素に拡張することはできない.

例 2. 測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ の上の L^2 を考える. また $K(x, y)$ を直積測度空間 $(X\times X, \mathfrak{B}\times\mathfrak{B}, \mu\times\mu)$ の上の可測函数で

$$\int_X\int_X|K(x, y)|^2 d\mu(x)d\mu(y)<\infty \tag{25. 7}$$

なるものとする. 任意の $f\in L^2$ に対して

---

*) 上限を考える範囲が広い方が上限は小さくない.

(25. 8) $$Kf(x)=\int_X K(x,\ y)f(y)d\mu(y)$$

で定義される積分作用素 K は，L^2 から L^2 の中への有界線型作用素である．なぜならば，L^2 におけるノルムを $\|\cdot\|$ と書くことにし，まず (25. 8) に Schwarz の不等式 (22. 1) を適用して

$$|Kf(x)|^2 \leqq \int_X |K(x,\ y)|^2 d\mu(y)\int_X |f(y)|^2 d\mu(y) \leqq \|f\|^2 \int_X |K(x,\ y)|^2 d\mu(y).$$

だから，(25. 7) の積分の値を M^2 $(M>0)$ とすると

$$\int_X |Kf(x)|^2 d\mu(x) \leqq \|f\|^2 M^2 < \infty,$$

すなわち $Kf \in L^2$, $\|Kf\| \leqq M\|f\|$ となる．K の線型性 (25. 2) は明らかである．

例 3. 測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ の上の L^1, L^2 を考える．i) X の上の任意の有界 $\mathfrak{B}$-可測函数 $\varphi(x)$ (或いは任意の $\varphi \in M(X, \mathfrak{B}, \mu)$ といってもよい) を固定し，$f \in L^1$ に対して

$$F_\varphi(f)=\int_X f(x)\varphi(x)d\mu(x)$$

とおくと，F_φ は L^1 の上の有界線型汎函数である．従って特に，ii) $f \in L^1$ の不定積分

$$F_E(f)=\int_E f(x)d\mu(x)$$

は，E を固定すれば L^1 の上の有界線型汎函数である．(不定積分は通常 f を固定して集合 E の函数と考えるから $F_f(E)$ のような記号を使うことが多いが，ここでは E を固定して f の函数と考えるから $F_E(f)$ と書いた．) また iii) 任意の $g \in L^2$ を固定し，$f \in L^2$ に対して

$$F_g(f)=(f,\ g) \equiv \int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x)$$

とおくと F_g は L^2 の上の有界線型汎函数である (Schwarz の不等式 (22. 1) により)．

一般に $1<p<\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ のとき，任意の $g \in L^q$ を固定し，$f \in L^p$ に対して

$$F_g(f)=\int_X f(x)g(x)d\mu(x)$$

とおくと F_g は L^p の上の有界線型汎函数である (Hölder の不等式 (22. 7) により)．

例 4. R^N の上で有界な台をもつ連続函数の全体 L (ノルムは $\|\cdot\|_\infty$) を考える．Φ を R^N の上の加法的 $(\mathfrak{B}_N)$ 集合函数とし，$f \in L$ に対して

$$F_\Phi(f)=\int_{R^N} f(x)d\Phi(x)$$

とおくと，F_Φ は有界線型汎函数である．(§20問1において $|f(x)|\leqq\|f\|_\infty$ であるから)．L は L_∞ においてノルム $\|\cdot\|_\infty$ に関して稠密だから，F_Φ は L_∞ の上の有界線型汎函数に拡張されるが，拡張したものも同じ積分の式で表わされる．また μ を $(R^N,\ \mathfrak{B}_N)$ の上の測度 (Lebesgue 測度とはかぎらない) とすると，$f\in L$ に対して

$$F_\mu(f)=\int_{R^N} f(x)d\mu(x)$$

は L の上の線型汎函数である．$\mu(R^N)<\infty$ ならば，これは上の F_Φ の特別の場合であるが，$\mu(R^N)=\infty$ のときは F_μ は有界ではなく，L_∞ にまで拡張できない．次に二つの測度 $\mu_1,\ \mu_2$ があって，どちらについても任意の有界 Borel 集合の測度は有限であるとする．このとき $\mu=\mu_1-\mu_2$ なるものは加法的集合函数としての意味を持たない (有界でない集合に対しては $\infty-\infty$ となることもある) が，任意の $f\in L$ は有界な台をもつから，

$$F_\mu(f)=\int_{R^N} fd\mu_1-\int_{R^N} fd\mu_2$$

は定義されて L の上の線型汎函数となる．この意味で

$$F_\mu(f)=\int_{R^N} fd\mu,\qquad \mu=\mu_1-\mu_2$$

と書く；f を一つきめると，その台の上では μ は普通の加法的集合函数としての意味をもつから $F_\mu(f)$ は f の μ による Lebesgue-Stieltjes 積分である．

ついでながら，不定積分の極限がまた不定積分になるための一つの十分条件を与えるところの Vitali-Hahn-Saks (ヴィタリ-ハーン-サックス) の定理を証明しよう．この定理は，本書においては応用の機会はない (従って，以後この§の最後までは読まずに次へ進まれてもよい) けれども，函数解析への応用*) において重要な定理の一つであるから，ここに述べておく．

まず測度空間 $(X,\ \mathfrak{B},\ \mu)$ が与えられたとし，X は μ-測度有限な集合の可算個の和集合になっているとする．X の上の加法的集合函数の列 $\{\Phi_n\}$ が n に関して**一様に絶対連続**であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta_\varepsilon>0$ が存在して

(25. 8)　集合 $E\in\mathfrak{B}$ が $\mu(E)<\delta_\varepsilon$ なるかぎり，すべての n に対して $|\Phi_n(E)|<\varepsilon$

となることである (すなわち δ_ε が E にも n にも無関係にとれる)．このとき各 n に対して Radon-Nikodym の定理により

*) 例えば，この§の例3の ii) に関連して．

$$(25.\ 9)\qquad \Phi_n(E)=\int_E f_n(x)d\mu(x)$$

となるような $f_n\in L^1$ が存在するから，$\{\Phi_n\}$ の一様絶対連続性を $\{f_n\}$ について言いなおすと：

$$(25.\ 10)\quad \begin{cases}\text{任意の } \varepsilon>0 \text{ に対して } \delta_\varepsilon>0 \text{ が存在して，} \mu(E)<\delta_\varepsilon \text{ なるすべての } E \text{ と} \\ \text{すべての } n \text{ に対して } \left|\int_E f_n(x)d\mu(x)\right|<\varepsilon \text{ となる.}\end{cases}$$

このことを，函数列 $\{f_n\}$ が一様可積分であるということがある.

以上の準備をして，

定理 25. 3 (**Vitali-Hahn-Saks の定理**). 測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ において，(25. 9) で与えられる不定積分の列 $\{\Phi_n\}$ が，すべての $E\in\mathfrak{B}$ に対して有限な極限値 $\Phi(E)=\lim_{n\to\infty}\Phi_n(E)$ をもつならば，$\{\Phi_n\}$ は n に関して一様に絶対連続である. 従って，X が可算個の μ 測度有限な集合の和である場合には，$\Phi(E)$ もまた不定積分で表わされる.

証明. $\mathfrak{B}_0=\{E;\ E\in\mathfrak{B},\ \mu(E)<\infty\}$ とおき，$\mathfrak{B}_0$ において二つの集合 E, E' が $\mu(E\ominus E')=0$ のときは同じものと考えることにすると，$\mathfrak{B}_0$ は $\rho(E,\ E')=\mu(E\ominus E')$ なる距離 ρ によって完備な距離空間になる. なぜならば，$L^1=L^1(X, \mathfrak{B}, \mu)$ におけるノルムを $\|\cdot\|$ で表わすと

$$\rho(E,\ E')=\mu(E\ominus E')=\|\chi_E-\chi_{E'}\|$$

であるから，$\mathfrak{B}_0$ は L^1 の部分集合としての $\boldsymbol{L}=\{\chi_E;\ E\in\mathfrak{B}_0\}$ と同じものと考えることができ，$\boldsymbol{L}$ は完備な距離空間 L^1 の中の閉集合 (§22, 問2の i)) だから，それ自身完備な距離空間である (付録§4 定理 1). 次に (25. 9) は

$$\Phi_n(E)=\int_X f_n(x)\chi_E(x)d\mu(x)$$

と書けるから，不定積分の絶対連続性により Φ_n は $\mathfrak{B}_0$ の上の連続函数になる (§22問2の ii)). だから任意の $\eta>0$ と任意の n に対して

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_n(\eta)&=\{E;\ \sup_{k\geqq 1}|\Phi_n(E)-\Phi_{n+k}(E)|\leqq\eta\}\\ &=\bigcap_{k=1}^{\infty}\{E;\ |\Phi_n(E)-\Phi_{n+k}(E)|\leqq\eta\}\end{aligned}$$

は $\mathfrak{B}_0$ の中の閉集合である. 一方，定理の仮定により任意の $E\in\mathfrak{B}_0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{k\geqq 1}|\Phi_n(E)-\Phi_{n+k}(E)|\}=0$$

であるから，

$$\mathfrak{B}_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{F}_n(\eta).$$

だから Baire-Hausdorff の定理（付録 §4 定理 3）により，少なくも一つの $\mathfrak{F}_{n_0}(\eta)$ は内点を含む．すなわちその n_0（それは η に関係する）に対して，或る $E_0 \in \mathfrak{B}_0$ と $\delta_0>0$ とが存在して，

(25. 11) $$\rho(E,\ E_0)\leqq\delta_0 \text{ ならば } \sup_{k\geqq 1}|\Phi_{n_0}(E)-\Phi_{n_0+k}(E)|\leqq\eta.$$

ところが $\mu(E)\leqq\delta_0$ なる任意の $E\in\mathfrak{B}_0$ は，

$$E=E_1-E_2,\quad \text{ここに}\begin{cases}E_1=E\cup E_0\\ E_2=E_0-E_0\cap E\end{cases}$$

と表わすと，

(25. 12) $$\begin{cases}\rho(E_1,\ E_0)=\mu(E\cup E_0-E_0)\leqq\mu(E)\leqq\delta_0,\\ \rho(E_2,\ E_0)=\mu(E\cap E_0)\leqq\mu(E)\leqq\delta_0\end{cases}$$

であるから，$n\geqq n_0$ ならば

(25. 13) $$\begin{aligned}|\Phi_n(E)|&\leqq|\Phi_{n_0}(E)|+|\Phi_{n_0}(E)-\Phi_n(E)|\\ &\leqq|\Phi_{n_0}(E)|+|\Phi_{n_0}(E_1)-\Phi_n(E_1)|+|\Phi_{n_0}(E_2)-\Phi_n(E_2)|\\ &\leqq|\Phi_{n_0}(E)|+2\eta \qquad ((25.\ 11),\ (25.\ 12) \text{ により}).\end{aligned}$$

だから，任意の $\varepsilon>0$ に対して，まず $\eta=\varepsilon/4$ として上に述べたように n_0 と δ_0 とを定め，有限個の $\Phi_1,\ \cdots,\ \Phi_{n_0}$ の絶対連続性によって $\delta_1>0$ を

$$\mu(E)\leqq\delta_1 \text{ ならば } |\Phi_n(E)|<\varepsilon/2 \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots,\ n_0)$$

なるように定めて $\delta=\min\{\delta_0,\ \delta_1\}$ とおけば，(25. 13) と合わせて

$$\mu(E)\leqq\delta \text{ ならばすべての } n \text{ に対して } |\Phi_n(E)|<\varepsilon$$

となる．すなわち $\{\Phi_n\}$ は一様に絶対連続である．従って $\Phi(E)=\lim_{n\to\infty}\Phi_n(E)$ も同じ ε と δ に対して

(25. 14) $$\mu(E)\leqq\delta \text{ ならば } |\Phi(E)|\leqq\varepsilon$$

となる．

次に $\mu(X)<\infty$ の場合に $\Phi(E)$ が不定積分で表わされることを証明しよう．一般に $E_1,\ E_2\in\mathfrak{B}$; $E_1\cap E_2=\phi$ ならば

$$\Phi_n(E_1+E_2)=\Phi_n(E_1)+\Phi_n(E_2) \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

だから，$n\to\infty$ とすると仮定により

$$\Phi(E_1+E_2)=\Phi(E_1)+\Phi(E_2).$$

従って，$E_n\in\mathfrak{B}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，$E_m\cap E_n=\phi$ $(m\neq n)$ ならば，任意の N に対して

(25. 15) $$\Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{N}\Phi(E_n)+\Phi\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}E_n\right).$$

ところが $\mu(X)<\infty$ なることにより $\lim_{N\to\infty}\mu\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}E_n\right)=0$ だから，(25. 14) により

$$\lim_{N\to\infty}\Phi\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}E_n\right)=0.$$

だから，(25. 15) において $N\to\infty$ とすれば

$$\Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(E_n). \tag{25. 16}$$

すなわち Φ は加法的集合函数である．そして (25. 14) により μ に関して絶対連続だから，Radon-Nikodym の定理 18. 4 により Φ は μ による不定積分で表わされる．

最後に，X が可算個の μ 測度有限な集合の和である場合に，$\Phi(E)$ が不定積分で表わされることを証明しよう．その場合には X は

$$X=\sum_{k=1}^{\infty}X_k;\ \begin{cases}X_k\in\mathfrak{B},\ 0<\mu(X_k)<\infty & (k=1,\ 2,\ \cdots)\\ X_j\frown X_k=\phi & (j\neq k)\end{cases}$$

と書かれる．そして $\varphi(x)$ を

$$x\in X_k \text{ のとき } \varphi(x)=2^k\mu(X_k)$$

なる単函数とすると，$1/\varphi(x)$ は X の上で μ について可積分な函数になるから

$$\mu_\varphi(E)=\int_E\frac{1}{\varphi(x)}d\mu(x)$$

は $\mu_\varphi(X)<\infty$ なる測度を定義する．ここで

$$g_n(x)=f_n(x)\varphi(x)\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

とおくと，(25. 9) と定理 20. 1 により，$g_n(x)$ は X の上で μ_φ について可積分であって，任意の $E\in\mathfrak{B}$ に対して

$$\Phi_n(E)=\int_E f_n(x)\varphi(x)d\mu_\varphi(x)=\int_E g_n(x)d\mu_\varphi(x).$$

だから，測度空間 $(X,\ \mathfrak{B},\ \mu_\varphi)$ で考えると上の $\mu(X)<\infty$ の場合に帰着されたことになるから，X の上で μ_φ について可積分な函数 $g(x)$ が存在して

$$\Phi(E)=\int_E g(x)d\mu_\varphi(x)$$

となる．ここで再び定理 20. 1 を使うと，$f(x)=g(x)/\varphi(x)$ は μ について可積分で

$$\Phi(E)=\int_E\frac{g(x)}{\varphi(x)}d\mu(x)=\int_E f(x)d\mu(x) \tag{25. 17}$$

となる．これで定理 25. 3 が完全に証明された．

注意 1. 上の証明で (25. 14) が出たところでは，$\Phi(E)$ の‘完全加法性’がまだわかっていない．それで $\mu(X)<\infty$ の場合には，(25. 16) が証明されてから Radon-Nikodym の定理が使えるのである．最後に X が可算個の μ 測度有限な集合の和である場合には，

(25. 17) が直接に証明されたから，‘$\Phi(E)$ が不定積分で表わされる’という定理の主張と同時に，$\Phi(E)$ の‘完全加法性’もわかるわけである．

注意 2. 本質的なことではないが，上の定理 25. 3 における‘X が可算個の測度有限な集合の和’という条件は実は不要である．なぜならば，定理 12. 4 により集合

$$X_0=\bigcup_{n=1}^{\infty} X(f_n\neq 0)$$

は可算個の測度有限な集合の和であって，上の定理を X_0 の上で証明すればよいからである．

§26. 位相的外測度，正値加法的汎函数と測度

この§のおもな目的は，R^N の上の実数値函数の函数空間 L または L_∞ (§24) における正値加法的汎函数（定義は後に述べる）に測度が対応することを証明することであるが，その証明に使うために，位相的外測度*) について先に述べる．位相的外測度のことは，内容統一のためには第II章で述べるべきであったが，今まで応用の機会がなかったので述べなかったのである．

X を距離空間とする．(本書を読まれるかぎりは，$X=R^N$ の場合だけでよい．) 二点 x, $y\in X$ の距離を $\rho(x, y)$ で表わし，また点 z と集合 A, $B\subset X$ に対して

(26. 1) $\rho(z, A)=\inf\{\rho(z, x);\ x\in A\}$, $\rho(A, B)=\inf\{\rho(x, y);\ x\in A,\ y\in B\}$

とする．X の中のすべての開集合（閉集合と言っても同じである）を含む最小の σ-加法族を X における Borel 集合族といい，$\mathfrak{B}_X$ と書くことにする．また一点 $x_0\in X$ を固定しておき

$$S_n=\{x;\ \rho(x, x_0)<n\}$$

とおく．(すなわち S_n は中心が x_0 で半径が n の球の内部である．) このとき

(26. 2) $$X=\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

なることは明らかである．

X の上の外測度 Γ が**位相的外測度**であるとは，(§5 で述べた外測度の条件のほかに)

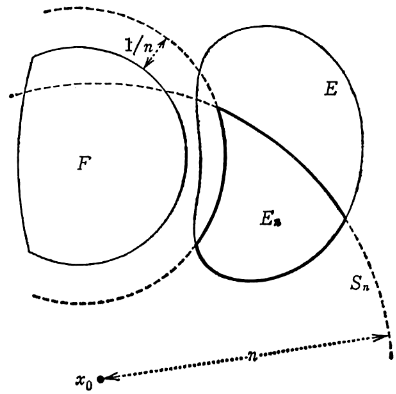
(26. 3) A, B が有界で $\rho(A, B)>0$ ならば $\Gamma(A+B)\geqq\Gamma(A)+\Gamma(B)$

を満たすことである（外測度の性質 (5. 3) により，$\geqq$ は実は $=$ となる）．このとき

補助定理 1. Γ が X の上の位相的外測度，F は X の中の有界閉集合，$E(\subset X)$ は F と交わらない任意の集合とし，$n=1, 2, \cdots$ に対して

*) ‘位相的’という言葉は，記述の簡便のために単なる用語として使うだけであるから，一般の位相空間に関する知識は必要でない．

$$E_n=\left\{x;\ \begin{matrix} x\in E\cap S_n \\ \rho(x,\ F)>\dfrac{1}{n} \end{matrix}\right\}$$



（右図参照）とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma(E_n)=\Gamma(E).$$

証明. 集合列 $\{E_n\}$ は単調増加で $\lim_{n\to\infty} E_n=E$ だから

(26. 4) $\quad \lim_{n\to\infty}\Gamma(E_n)$ が存在して $\leqq\Gamma(E)$

となる．次に $D_n=E_{n+1}-E_n$ とおくと

(26. 5) $$\rho(D_n,\ D_{n+2})\geqq\frac{1}{n(n+1)}>0$$

である．なぜならば，任意の $x\in D_n$, $y\in D_{n+2}$ に対して

$$\begin{cases} x\in E_n \text{ だから } \rho(x,\ x_0)<n \text{ でしかも } \rho(x,\ F)>\dfrac{1}{n}, \\ y\notin E_{n+1} \text{ だから } \rho(y,\ x_0)\geqq n+1 \text{ 或いは } \rho(y,\ F)\leqq\dfrac{1}{n+1}; \end{cases}$$

従って，

$$\rho(x,\ y)\geqq\rho(y,\ x_0)-\rho(x,\ x_0)>(n+1)-n=1$$

或いは

$$\rho(x,\ y)\geqq\rho(x,\ F)-\rho(y,\ F)>\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$$

の少なくも一方が成立するからである．だから位相的外測度の条件 (26. 3) により

(26. 6) $$\begin{cases} \Gamma(E_{2n})\geqq\Gamma\left(\sum\limits_{k=1}^{n} D_{2k-1}\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\Gamma(D_{2k-1}), \\ \Gamma(E_{2n+1})\geqq\Gamma\left(\sum\limits_{k=1}^{n} D_{2k}\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\Gamma(D_{2k}). \end{cases}$$

一方 $E=E_{2n}+D_{2n}+D_{2n+1}+\cdots$ と書けるから，

$$a_n=\sum_{k=n}^{\infty}\Gamma(D_{2k}),\quad b_n=\sum_{k=n}^{\infty}\Gamma(D_{2k+1})$$

とおくと，外測度の性質により

(26. 7) $$\Gamma(E)\leqq\Gamma(E_{2n})+a_n+b_n.$$

さて級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Gamma(D_{2k}),\quad \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma(D_{2k+1}) \tag{26. 8}$$

がともに収束する場合は $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ ($n \to \infty$) であるから，(26. 7) と (26. 4) により

$$\Gamma(E) \leqq \lim_{n\to\infty} \Gamma(E_{2n}) = \lim_{n\to\infty} \Gamma(E_n) \leqq \Gamma(E), \tag{26. 9}$$

すなわち $\Gamma(E) = \lim_{n\to\infty} \Gamma(E_n)$ である．また (26. 8) の級数の少なくも一方が発散する場合は，(26. 6) により $\lim_{n\to\infty} \Gamma(E_{2n})$, $\lim_{n\to\infty} \Gamma(E_{2n+1})$ の少なくも一方は ∞ であるが，(26. 4) により $\lim_{n\to\infty} \Gamma(E_n)$ が存在するから，それは ∞ である；従って

$$\Gamma(E) \geqq \lim_{n\to\infty} \Gamma(E_n) = \infty$$

となり $\Gamma(E) = \lim_{n\to\infty} \Gamma(E_n)$ (両辺ともに ∞) である．

定理 26. 1. Γ が X の上の位相的外測度ならば $\mathfrak{B}_X \subset \mathfrak{M}_\Gamma$ (＝Γ-可測集合の全体)．

証明． 任意の有界閉集合 F が $\mathfrak{M}_\Gamma$ に属することを示せばよいから，任意の $A \subset F$, $B \subset F^c$ に対して

$$\Gamma(A+B) \geqq \Gamma(A) + \Gamma(B) \tag{26. 10}$$

となることを示せばよい (§5 の (5. 5′) とその後の注意参照)．

$$B_n = \{x;\ x \in B \frown S_n,\ \rho(x,\ F) > 1/n\} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

とおくと，補助定理 1 により

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma(B_n) = \Gamma(B). \tag{26. 11}$$

A および各 B_n は有界で $\rho(A,\ B_n) \geqq \rho(F,\ B_n) \geqq 1/n > 0$ だから，位相的外測度の性質により

$$\Gamma(A+B) \geqq \Gamma(A+B_n) = \Gamma(A) + \Gamma(B_n).$$

ここで $n \to \infty$ とすれば (26. 11) によって (26. 10) が得られる．(証明終)

逆に，X の上の外測度 Γ があって，すべての Borel 集合が Γ-可測ならば，Γ は位相的外測度である——すなわち (26. 3) が成立する．しかし実は，それよりやや強く，次のことがいえる．

定理 26. 2. X の上の外測度 Γ があって，$\mathfrak{B}_X \subset \mathfrak{M}_\Gamma$ であるとする．このとき，集合 A, $B \subset X$ が

$$\rho(A,\ B) > 0 \tag{26. 12}$$

または

$$\bar{A} \frown \bar{B} = \phi \tag{26. 13}$$

を満たすならば (A, B は有界でなくても)

$$\Gamma(A+B)=\Gamma(A)+\Gamma(B). \tag{26. 14}$$

証明. (26. 12) から (26. 13) が出ることは明らかだから，(26. 13) から (26. 14) を出せばよい．$\bar{A}$ は閉集合だから $\bar{A}\in\mathfrak{B}_X\subset\mathfrak{M}_\Gamma$．一方

$$A\subset\bar{A},\ B\subset\bar{B}\subset X-\bar{A} \qquad ((26.\ 13)\ \text{により})$$

であるから，Γ-可測なことの定義により (26. 14) が成立する．(証明終)

次に正値加法的汎函数と測度の話に入ろう．R^N の上の実数値函数の函数空間 L, L_∞ を §24 で述べたとおりとする．R^N における Borel 集合族 $\mathfrak{B}_N$ で定義された測度 μ があるとき，$f\in L$ に対して

$$T(f)=\int_{R^N}f(x)d\mu(x) \tag{26. 15}$$

が定義されて，任意の f, $g\in L$ に対して

$$T(f+g)=T(f)+T(g) \qquad (\text{加法性}), \tag{26. 16}$$

$$f\geqq 0\ \text{ならば}\ T(f)\geqq 0 \qquad (\text{正値性}). \tag{26. 17}$$

特に $\mu(R^N)<\infty$ のときは，すべての $f\in L_\infty$ に対して (26. 15) が定義されて，L_∞ の上で (26. 16), (26. 17) が成立する．一般に実数値函数の線型空間の上の汎函数 T があって (26. 16), (26. 17) を満たすとき，T をその函数空間の上の**正値加法的汎函数**と呼ぶ．上の二つの条件から，次の補助定理 2 に示すように

$$\text{任意の実数}\ \alpha\ \text{に対して}\ T(\alpha f)=\alpha T(f)$$

なることが出るから，この T は前の § で定義した加法的汎函数（＝線型汎函数）である．

上に述べたことの逆として，L または L_∞ の上の任意の正値加法的汎函数 T は $\mathfrak{B}_N$ の上の或る測度 μ によって (26. 15) で表わされること（定理 26. 3――26. 5）を証明するのが，この § の目的である．まず準備として

補助定理 2. T が実数値函数の線型空間 $\boldsymbol{E}$ の上の正値加法的汎函数ならば，任意の f, $g\in\boldsymbol{E}$ に対して

$$T(f-g)=T(f)-T(g),\ \text{従って}\ T(0)=0, \tag{26. 18}$$

$$f\geqq g\ \text{ならば}\ T(f)\geqq T(g), \tag{26. 19}$$

$$\text{任意の実数}\ \alpha\ \text{に対して}\ T(\alpha f)=\alpha T(f). \tag{26. 20}$$

証明. まず $T(f-g)+T(g)=T((f-g)+g)=T(f)$ から (26. 18) が出る．従って (26. 17) と合せて (26. 19) が得られる．次に (26. 20) を証明しよう．まず α が自然数のときは (26. 16) を有限回くりかえして使えばよい．α が正の有理数のときは，$\alpha=m/n$ (m, n は自然数) と書けるから

$$nT\left(\frac{m}{n}f\right)=T(mf)=mT(f)$$

の両辺を n で割って $T(\alpha f)=\alpha T(f)$ を得る．次に α が任意の正数で $f\geqq 0$ の場合は，$0<\beta<\alpha<\gamma$ なる有理数 β, γ をとれば $0\leqq\beta f\leqq\alpha f\leqq\gamma f$ だから，上の結果と (26. 19) により

$$0\leqq\beta T(f)=T(\beta f)\leqq T(\alpha f)\leqq T(\gamma f)=\gamma T(f);$$

ここで β, γ は α にどれだけでも近くとれるから $T(\alpha f)=\alpha T(f)$ である．また (26. 18) により $T(-f)=T(0-f)=T(0)-T(f)=-T(f)$ だから，上に述べた $\alpha>0$ の場合と合せて，任意の実数 α と $f\geqq 0$ なる任意の $f\in \boldsymbol{E}$ に対して (26. 20) が成立する．最後に一般の $f\in \boldsymbol{E}$ については，$f=f^+-f^-$ として今までの結果を使えばよい．

補助定理 3. T が L の上の正値加法的汎函数であって，函数列 $\{f_n\}\subset L$ が各点 $x\in R^N$ で n について単調減少で $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$ ならば，$\lim_{n\to\infty} T(f_n)=0$ である．

証明. 集合 $\{x;\ f_1(x)>0\}$ の閉包（すなわち $\mathrm{Car}(f_1)$）を F とする．F は有界閉集合だから，F の上で $g(x)=1$, R^N 全体で $g(x)\geqq 0$ なる $g\in L$ が存在する．任意に定めた $\varepsilon>0$ に対して

$$G_n=\{x;\ f_n(x)<\varepsilon g(x)\}\qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

とおくと，各点 x で $\{f_n\}$ が単調減少で $\lim f_n=0$ なることと g の定め方により，$\{G_n\}$ は開集合の単調増加列で $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\supset F$ となる．だから Borel-Lebesgue の被覆定理（付録 §2，定理 1）により $\bigcup_{n=1}^{m} G_n\supset F$ となるような m があるが，$\{G_n\}$ が単調増加なことにより $G_m\supset F$ である．すなわち

$$x\in F \text{ ならば } f_m(x)<\varepsilon g(x).$$

また $x\notin F$ ならば $f_m(x)\leqq f_1(x)=0\leqq\varepsilon g(x)$ だから，R^N の上で

$$f_m(x)\leqq\varepsilon g(x).$$

従って $n\geqq m$ ならば $f_n(x)\leqq\varepsilon g(x)$ $(x\in R^N)$ となる．だから補助定理 2 により

$$T(f_n)\leqq\varepsilon T(g)\qquad (n\geqq m).$$

$n\to\infty$ として

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, T(f_n)\leqq\varepsilon T(g).$$

ここで $T(g)$ は或る有限な値で，ε は 0 にどれだけでも近くとれるから

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, T(f_n)\leqq 0.$$

一方仮定により $\underline{\lim}_{n\to\infty} T(f_n)\geqq 0$ であるから，$\lim_{n\to\infty} T(f_n)=0$ となる．

定理 26. 3. L の上の正値加法的汎函数 T に対して，$\mathfrak{B}_N$ の上の測度 μ が存在して，すべての $f\in L$ に対して

$$T(f)=\int_{R^N} f(x)d\mu(x) \tag{26. 15'}$$

となり，また

$$\mu(R^N)=\sup_{f\in L,\,0\leq f\leq 1} T(f) \quad (\leqq\infty) \tag{26. 21}$$

が成立する．

証明. この証明の中では f, g, h およびそれらに添え字 $(1, 2, \cdots, n, \cdots)$ をつけた記号は，いつも L に属する函数を表わすことにし，一々 $\in L$ と書かない．また積分範囲が R^N の場合は $\int$ の下の R^N を省略する．証明を三段に分ける．

（第一段）位相的外測度 Γ の構成．$f\geqq 0$ で $f\not\equiv 0$ ならば，開集合 $\{x;\, f(x)>0\}$ を平行移動したものの可算個の和で R^N 全体が掩われるから，任意の集合 $A\subset R^N$ の定義函数 χ_A に対して

$$f_n\geqq 0 \quad (n=1, 2, \cdots),\quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n\geqq\chi_A \quad \begin{pmatrix}\text{左辺が } \infty \text{ になる点 } x\\ \text{があってもよい}\end{pmatrix}$$

となるような函数列 $\{f_n\}$ が必ず存在する．任意の $A\subset R^N$ に対して，そのような $\{f_n\}$ のあらゆるとり方を考えて

$$\Gamma(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} T(f_n);\ f_n\geqq 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n\geqq\chi_A\right\}$$

とおき，この Γ が位相的外測度であることを証明しよう．$f_n\geqq 0$ なら $T(f_n)\geqq 0$ だから $0\leqq\Gamma(A)\leqq\infty$ なることは明らかである．$A=\phi$ のときは $f_n\equiv 0$ とおいてみれば，$0\leqq\Gamma(\phi)\leqq\sum_n T(f_n)=0$ すなわち $\Gamma(\phi)=0$ である．次に $A\subset B$ ならば $\Gamma(A)\leqq\Gamma(B)$ なること：$\sum_n f_n\geqq\chi_B$, $f_n\geqq 0$ なる任意の $\{f_n\}$ に対して，$\sum_n f_n\geqq\chi_A$ でもあるから

$$\Gamma(A)\leqq\sum_{n=1}^{\infty} T(f_n);$$

この右辺の下限（$\sum_n f_n\geqq\chi_B$, $f_n\geqq 0$ なる $\{f_n\}$ のあらゆるとり方に対する）をとれば $\Gamma(A)\leqq\Gamma(B)$ を得る．また $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ならば $\Gamma(A)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma(A_n)$ なることは，次のようにしてわかる．任意の $\varepsilon>0$ に対して $\Gamma(A_n)$ の定義により

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_{n\nu}\geqq\chi_{A_n},\ f_{n\nu}\geqq 0,\quad \sum_{\nu=1}^{\infty} T(f_{n\nu})\leqq\Gamma(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}$$

なる $\{f_{n\nu};\ \nu=1, 2, \cdots\}$ が存在する．このとき

$$\sum_{n,\nu=1}^{\infty} f_{n\nu} \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} \geqq \chi_A$$

だから

$$\Gamma(A) \leqq \sum_{n,\nu=1}^{\infty} T(f_{n\nu}) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \Gamma(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right\} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n) + \varepsilon;$$

ここで ε は任意の正数だから $\Gamma(A) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n)$ である．最後に (26. 3) を示せばよい．A, B が有界で $\rho(A, B) = \delta > 0$ とする．

$$f(x) = \max\left\{1 - \frac{2}{\delta}\rho(x, A),\ 0\right\},\quad g(x) = \max\left\{1 - \frac{2}{\delta}\rho(x, B),\ 0\right\}$$

とおくと f, $g \in L$であり，*)また

(26. 22)　　$$f \geqq \chi_A,\quad g \geqq \chi_B,\quad f(x)g(x) \equiv 0$$

である．いま

(26. 23)　　$$h_n \geqq 0,\quad \sum_{n=1}^{\infty} h_n \geqq \chi_{A+B}$$

なる任意の $\{h_n\}$ をとり

$$f_n = \min\{f,\ h_n\},\qquad g_n = \min\{g,\ h_n\}$$

とおくと，(26. 22) により $\sum_n f_n \geqq \chi_A$, $\sum_n g_n \geqq \chi_B$, $f_n + g_n \leqq h_n$. だから

$$\Gamma(A) + \Gamma(B) \leqq \sum_n T(f_n) + \sum_n T(g_n) = \sum_n \{T(f_n) + T(g_n)\}$$

$$= \sum_n T(f_n + g_n) \leqq \sum_n T(h_n), \text{**)}$$

ここで (26. 23) のような $\{h_n\}$ のあらゆるとり方に対する右辺の下限をとり $\Gamma(A) + \Gamma(B) \leqq \Gamma(A+B)$ を得る．これで Γ が位相的外測度であることがわかった．

よって定理 26. 1 により $\mathfrak{B}_N \subset \mathfrak{M}_\Gamma$ となるから，Γ を $\mathfrak{B}_N$ の上で考えたものを μ と書くことにすれば，μ は $\mathfrak{B}_N$ の上の測度である．

（第二段）G が開集合ならば，上に構成した測度 μ に対して

(26. 24)　　$$\mu(G) = \sup_{0 \leq f \leq \chi_G} T(f)$$

が成立することを示す．まず $0 \leqq f \leqq \chi_G$ なる任意の f をとり，次に

---

*) 付録§3 の定理 2 により $\frac{2}{\delta}\rho(x, A)$, $\frac{2}{\delta}\rho(x, B)$ は x の連続函数であるから．

**) $\sum$ は無限和だから，この式の変形で $\sum_n T(f_n) = T\left(\sum_n f_n\right)$ のようにすることはできない；T については (26. 16)—(26. 20) が使えるだけである．

(26. 25)
$$g_n \geqq 0,\quad \sum_{n=1}^{\infty} g_n \geqq \chi_G \ (\geqq f)$$

なる任意の $\{g_n\}$ をとって $f_n=\max\left\{f-\sum_{\nu=1}^{n} g_\nu,\ 0\right\}$ とおくと，$\{f_n\}\subset L$ であって，各点 $x\in R^N$ で $\{f_n\}$ は単調減少で 0 に近づくから，補助定理 3 により

$$\lim_{n\to\infty} T(f_n)=0.$$

一方補助定理 2 により

$$T(f_n)\geqq T\left(f-\sum_{\nu=1}^{n} g_\nu\right)=T(f)-\sum_{\nu=1}^{n} T(g_\nu)$$

だから，$n\to\infty$ として

$$T(f)\leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} T(g_\nu).$$

ここで，(26. 25) のような $\{g_n\}$ のあらゆるとり方に対する右辺の下限をとり

$$T(f)\leqq \Gamma(G).$$

この右辺は最初の f のとり方に無関係だから

(26. 26)
$$\sup_{0\leq f\leq \chi_G} T(f)\leqq \Gamma(G)=\mu(G).$$

また開集合 G は適当な有界閉集合の単調増加列 $\{F_n\}$ の極限集合である*)から

$$\lim_{n\to\infty} \mu(F_n)=\mu(G).$$

各 n に対して，$F_n\subset G$ だから，$\chi_{F_n}\leqq f_n\leqq \chi_G$ なる f_n が存在する.**) 従って $\Gamma(F_n)$ の定義により

$$\mu(F_n)=\Gamma(F_n)\leqq T(f_n)\leqq \sup_{0\leq f\leq \chi_G} T(f).$$

$n\to\infty$ とすると

$$\mu(G)\leqq \sup_{0\leq f\leq \chi_G} T(f)$$

となるから，(26. 26) と合せて (26. 24) が得られる.

ここで特に $G=R^N$ とおけば，定理の中の (26. 21) が証明されたわけである.

(第三段) 定理の (26. 15′) の証明. まず任意の $f\geqq 0$ に対して

(26. 27)
$$\int f\,d\mu\leqq T(f)$$

となることを証明しよう. 集合 $E=\{x;\ f(x)>0\}$ は有界だから $\chi_E\leqq g\in L$ なる g が存

*)　ここで G は有界でなくてもよい; 付録§3 定理 4 参照.

**)　付録§3 例 1 参照.

在する．従って

$$\mu(E)=\Gamma(E)\leqq T(g)<\infty.$$

また $\alpha>0$ に対して $E_\alpha=E(f=\alpha)$ とおくと，$\alpha\neq\beta$ ならば $E_\alpha\frown E_\beta=\phi$ である．だから $\mu(E_\alpha)>0$ なる α は高々可算無限個しかない．従って $\mu(E_\alpha)=0$ なる α の集合は正数全体の中で稠密である．だから，任意の $\varepsilon>0$ に対して，0 と $\max_x f(x)$ との間を有限個に分割して

$$0=\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{n-1}<\alpha_n=\max f(x),$$

$$\alpha_\nu-\alpha_{\nu-1}<\varepsilon,\ \ \mu(E_{\alpha_\nu})=0\ \ (\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

とすることができる．ここで

$$G_\nu=E(\alpha_{\nu-1}<f<\alpha_\nu)\qquad(\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

とおくと

$$f-\varepsilon\leqq\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{\nu-1}\chi_{G_\nu}\leqq f$$

である．この左の不等式と $\mu(E_{\alpha_\nu})=0$ とにより

(26. 28) $$\int fd\mu-\varepsilon\mu(E)=\int_E(f-\varepsilon)d\mu\leqq\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{\nu-1}\mu(G_\nu).$$

ところが各 G_ν は開集合だから，第二段により

$$0\leqq g_\nu\leqq\chi_{G_\nu},\quad T(g_\nu)>\mu(G_\nu)-\frac{\varepsilon}{n\alpha_\nu}$$

なる g_ν が存在し，$\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{\nu-1}g_\nu\leqq\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{\nu-1}\chi_{G_\nu}\leqq f$ となる．だから (26. 28) により

$$\int fd\mu-\varepsilon\mu(E)<\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{\nu-1}\left\{T(g_\nu)+\frac{\varepsilon}{n\alpha_\nu}\right\}$$

$$\leqq T\left(\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{\nu-1}g_\nu\right)+\varepsilon\leqq T(f)+\varepsilon.$$

ここで $\mu(E)<\infty$ であり ε は任意に小さくとれるから，(26. 27) が成立する．

次に任意の $f\in L$ ($f\geqq0$ とはかぎらない) に対して (26. 27) が成立することを示す．$E=\{x;\ f(x)\neq0\}$ の閉包 $\bar{E}$ は有界閉集合であるから，適当な有界開集合の単調減少列 $\{G_n\}$ の極限集合である．*) 従って

(26. 29) $$\lim_{n\to\infty}\mu(G_n)=\mu(\bar{E}).$$

各 n に対して $\bar{E}\subset G_n$ だから $\chi_{\bar{E}}\leqq g_n\leqq\chi_{G_n}$ なる g_n が存在する．このとき

*) 付録 §3 定理 3 参照．

$$\mu(\bar{E})\leqq\int g_n d\mu\leqq\mu(G_n)$$

であり，また $\Gamma(\bar{E})$ の定義とこの証明の第二段により

$$\mu(\bar{E})=\Gamma(\bar{E})\leqq T(g_n)\leqq\mu(G_n)$$

だから，(26. 29) により

$$\lim_{n\to\infty}\int g_n d\mu=\lim_{n\to\infty} T(g_n)=\mu(\bar{E})<\infty. \tag{26. 30}$$

今 $\alpha=\max_x|f(x)|$ とおくと，$g_n\geqq\chi_{\bar{E}}$ により $0\leqq f+\alpha g_n\in L$ だから，第三段の最初に証明したことにより

$$\int fd\mu+\alpha\int g_n d\mu=\int(f+\alpha g_n)d\mu\leqq T(f+\alpha g_n)=T(f)+\alpha T(g_n).$$

ここで $n\to\infty$ とすれば，(26. 30) により $\int fd\mu\leqq T(f)$ が得られる.

こうして，(26. 27) がすべての $f\in L$ に対して成立するから，f を $-f$ でおきかえて $-\int fd\mu=\int(-f)d\mu\leqq T(-f)=-T(f)$，従って

$$\int fd\mu\geqq T(f).$$

これと (26. 27) とを合わせて (26. 15′) を得る. (証明終)

次に，L_∞ の上の正値加法的汎函数に対する同じ定理を証明するため，まず補助定理 3 を L_∞ の場合に拡張した補助定理 4 を述べる. 補助定理 3 は補助定理 4 に含まれるのであるが，定理 26. 3 (L の場合) の証明のためにも，また補助定理 4 の証明を読むにも，補助定理 3 だけを先に証明しておいた方が本質的な点が理解しやすいから，そうしたのである. なお定理 26. 3 では $\mu(R^N)=\infty$ のこともある (例えば μ が普通の Lebesgue 測度になる場合も定理 26. 3 に含まれる) が，定理 26. 4 (L_∞ の場合) は必ず $\mu(R^N)<\infty$ となることも注目に値する.

しかし定理 26. 4 は本書においては今後使わないし，その後の定理 26. 5 (§30 で使う) に対しては定理 26. 4 を使わない証明を与えておくから，次の補助定理 4 と定理 26. 4 は読まずに進まれてもよい.

補助定理 4. T が L_∞ の上の正値加法的汎函数であって，函数列 $\{f_n\}\subset L_\infty$ が各点 $x\in R^N$ で n について単調減少で $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$ ならば，$\lim_{n\to\infty} T(f_n)=0$ である.

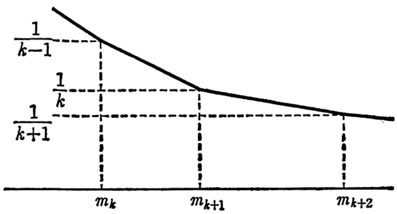
証明. $S_m=\{x;\ |x|<m\}$ $(m=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく. $f_1\in L_\infty$ だから，任意の自然数 k に対して適当な m_k をとり

(26. 31) $$x \notin S_{m_k} \text{ ならば } f_1(x) < 1/k^2$$

となるようにできる. $\lambda \geqq 0$ の函数 $\varphi(\lambda)$ を

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda < m_2, \\ \dfrac{1}{m_{k+1}-m_k}\left(\dfrac{m_{k+1}-\lambda}{k-1} + \dfrac{\lambda - m_k}{k}\right), & m_k \leqq \lambda < m_{k+1} \quad (k=2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

と定義し (右図参照)*)



$$g(x) = \max\{f_1(x),\ \varphi(|x|)\}$$

とおくと,

$$f_1 \leqq g \in L_\infty$$

であり, また (26. 31) により

$$x \in S_{m_{k+1}} - S_{m_k}$$

ならば

$$f_1(x) < \frac{1}{k^2} \leqq \frac{1}{k} g(x),$$

従って

(26. 32) $$x \notin S_{m_k} \text{ ならば } f_1(x) \leqq \frac{1}{k} g(x).$$

さて任意に定めた $\varepsilon > 0$ に対して, $\dfrac{1}{k} < \varepsilon$ なる k を一つとり, また

$$G_n = \{x;\ f_n(x) < \varepsilon g(x)\} \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

とおくと, 補助定理 3 の証明と同様にして

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \supset \bar{S}_{m_k} \qquad (k \text{ はすぐ上でとったもの}),$$

従って $G_{n_0} \supset S_{m_k}$ なる n_0 の存在がわかる. すなわち

$$x \in S_{m_k} \text{ ならば } f_{n_0}(x) \leqq \varepsilon g(x).$$

また k のとり方と (26. 32) により $x \notin S_{m_k}$ ならば $f_{n_0}(x) \leqq f_1(x) \leqq \varepsilon g(x)$ だから, R^N の上全体で $f_{n_0}(x) \leqq \varepsilon g(x)$. 従って $n \geqq n_0$ ならば $f_n(x) \leqq \varepsilon g(x)$ $(x \in R^N)$ となる. あとは補助定理 3 の証明とまったく同様にして $\lim_{n\to\infty} T(f_n) = 0$ が得られる (補助定理 3 の証明の f_n, g を, ここの f_n, g と思って読めばよい).

定理 26. 4. L_∞ の上の正値加法的汎函数 T に対して, $\mathfrak{B}_N$ の上の測度 μ が存在して, すべての $f \in L_\infty$ に対して

*) 一般に $\varphi(\lambda)$ としては, $\lambda < m_{k+1}$ ならば $\varphi(\lambda) \geqq 1/k$ であって, $\lim_{\lambda\to\infty} \varphi(\lambda) = 0$ となる連続函数を作ればよいのである.

(26. 15″) $$T(f)=\int_{R^N} f(x)d\mu(x)$$

となり，また

(26. 33) $$\mu(R^N)=\sup_{f\in L_\infty, 0\leqq f\leqq 1} T(f)<\infty$$

が成立する．従って，L_∞ においてノルム $\|\cdot\|_\infty$ (§24) を考えると，T はその上の有界線型汎函数である．

証明．$L\subset L_\infty$ だから，T を L の上だけで考えると定理26. 3の仮定を満たす．だから $\mathfrak{B}_N$ の上の測度 μ が存在して，すべての $f\in L$ に対して (26. 15″) が成立し，また

(26. 34) $$\mu(R^N)=\sup_{f\in L, 0\leqq f\leqq 1} T(f)\leqq \sup_{f\in L_\infty, 0\leqq f\leqq 1} T(f).$$

まず (26. 15″) が任意の $f\in L_\infty$ に対して成立することを示そう．$f\in L_\infty$ ならば f^+, $f^-\in L_\infty$ だから，$f\geqq 0$ のときに証明すればよい．$0\leqq f\in L_\infty$ とし，$\{h_n\}$ を (24. 2) のような連続函数列として $f_n(x)=h_n(x)f(x)$ とおくと，$0\leqq f_n\in L$ であり，函数列 $\{f_n\}$ は各点 $x\in R^N$ で n について単調増加で $\lim_{n\to\infty} f_n=f$ となる．従って定理 13. 2 により

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R^N} f_n d\mu=\int_{R^N} fd\mu.$$

また $f-f_n\in L_\infty$ $(n=1, 2, \cdots)$ であって，函数列 $\{f-f_n\}$ は各点 x で n について単調減少で $\lim_{n\to\infty}(f_n-f)=0$ だから，補助定理4により

$$T(f)-\lim_{n\to\infty} T(f_n)=\lim_{n\to\infty} T(f-f_n)=0.$$

ここで，各 $f_n\in L$ に対しては (26. 15″) が成立しているから，f に対しても (26. 15″) が成立する．従って $f\in L_\infty$, $0\leqq f\leqq 1$ ならば $T(f)\leqq\mu(R^N)$ となるから

$$\sup_{f\in L_\infty, 0\leqq f\leqq 1} T(f)\leqq\mu(R^N).$$

これと (26. 34) とから (26. 33) の左の等式を得る．よって $\mu(R^N)<\infty$ を証明すればよい．もしも $\mu(R^N)=\infty$ とすると，$S_m=\{x;\ |x|<m\}$ とおくとき

$$\sum_{m=1}^{\infty}\mu(S_m-S_{m-1})=\infty \qquad (\text{ただし } S_0=\phi \text{ とする}).$$

だから適当な自然数列 $\{m_k\}$ をとって

(26. 35) $$\mu(S_{m_k}-S_{m_{k-1}})\geqq 1 \qquad (k=1, 2, \cdots)$$

となるようにできる．各 $k\geqq 3$ に対して，R^N の上の連続函数 $f_k(x)$ で

(26. 36) $$\begin{cases} x\in \bar{S}_{m_k}-S_{m_{k-1}} \text{ ならば } f_k(x)=1 \\ x\in S_{m_{k-2}}\cup(R^N-S_{m_{k+1}}) \text{ ならば } f_k(x)=0 \\ R^N \text{ の上いたる所 } 0\leqq f_k(x)\leqq 1 \end{cases}$$

なるものが存在する．そこで

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}f_k(x)$$

とおくと，(26. 36) により $f(x)$ は任意の有界集合の上で有限個（実は3個）の $f_k(x)$ の和であり，$x\in S_{m_{k+1}}$ ならば $f(x)\leqq 3/k$ だから，$f\in L_\infty$ である．だから (26. 15″) と積分の性質（定理 13. 1）により

$$T(f)=\int_{R^N}fd\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_{R^N}f_kd\mu\geqq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\mu(S_{m_k}-S_{m_{k-1}})\ \text{((26. 36) により)}$$

$$\geqq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty\ \text{((26. 35) により)}$$

となり不合理である．だから $\mu(R^N)<\infty$ でなければならない．（証明終）

正値加法的汎函数 T が‘有界’なことがわかっている場合には，上の定理は次のような形にすることができて，証明も簡単になる．

定理 26. 5. $\boldsymbol{E}$ を L_∞ の中でノルム $\|\cdot\|_\infty$ に関して稠密な線型部分空間とすると，$\boldsymbol{E}$ の上の有界正値加法的汎函数 T に対して，$\mathfrak{B}_N$ の上の測度 μ が存在して，すべての $f\in\boldsymbol{E}$ に対して

$$T(f)=\int_{R^N}f(x)d\mu(x) \tag{26. 15‴}$$

となり，また

$$\mu(R^N)=\|T\| \tag{26. 37}$$

が成立する．

証明．はじめに定理 26. 4 を（従って補助定理4も）使わないで証明する．*) まず定理 25. 2 により，T は L_∞ の上の有界線型汎函数 $\tilde{T}$ に拡張されて $\|\tilde{T}\|=\|T\|$ である．このとき $\tilde{T}$ も正値になることは，定理 25. 2 の証明から容易にわかる．この $\tilde{T}$ を L の上で考えると，定理 26. 3 により $\mathfrak{B}_N$ の上の測度 μ が存在して，任意の $f\in L$ に対して (26. 15‴) の形の式（T を $\tilde{T}$ と書いて）が成立し，また

$$\mu(R^N)=\sup_{f\in L,0\leq f\leq 1}\tilde{T}(f)\leqq\sup_{f\in L_\infty,0\leq f\leq 1}\tilde{T}(f)=\|\tilde{T}\|; \tag{26. 38}$$

最後の等式は，$\|\tilde{T}\|$ の定義と $\tilde{T}$ が正値なことを使えば容易にわかる．次に任意の $f\in L_\infty$ に対して，$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_\infty=0$ なる函数列 $\{f_n\}\subset L$ が存在する（定理 24. 1）から，

---

*) 従って証明の内容は定理 26. 4 の証明とかなり重複する．

$$\left|\int_{R^N} f_n d\mu - \int_{R^N} f d\mu\right| \leqq \int_{R^N} |f_n - f| d\mu$$

$$\leqq \mu(R^N)\|f_n - f\|_\infty \to 0 \qquad (n\to\infty),$$

$$|\tilde{T}(f_n) - \tilde{T}(f)| \leqq \|\tilde{T}\|\cdot\|f_n - f\|_\infty \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

だから $f\in L_\infty$ に対しても (26. 15‴) の形の式が成立する．従って特に $f\in \boldsymbol{E}$ に対して (26. 15‴) が成立し，また $|\tilde{T}(f)|\leqq\mu(R^N)\|f\|_\infty$ $(f\in L_\infty)$ だから

$$\sup_{f\in L_\infty, 0\leq f\leq 1} \tilde{T}(f) \leqq \mu(R^N).$$

この式と (26. 38) および $\|\tilde{T}\|=\|T\|$ なることにより (26. 37) が得られる．(証明終)

定理 26. 4 を使えば，上の定理の証明は次のように簡単になる．

まず，定理 25. 2 とその証明からわかるように，T は L_∞ の上の有界正値線型汎函数 $\tilde{T}$ に拡張されて $\|\tilde{T}\|=\|T\|$ となる．だから定理 26. 4 により，$\mathfrak{B}_N$ の上の測度 μ が存在して，すべての $f\in L_\infty$ に対して，従って特にすべての $f\in \boldsymbol{E}$ に対して (26. 15‴) が成立し，また (26. 33) が成立するから

$$\mu(R^N) = \sup_{f\in L_\infty, 0\leq f\leq 1} \tilde{T}(f) = \|\tilde{T}\| = \|T\|$$

によって (26. 37) が得られる (上の第二の等式は $\tilde{T}$ が正値なことによって出せる)．

VI　Fourier 級数, Fourier 解析

§27. Hilbert 空間, 直交系

$\boldsymbol{H}$ を線型空間とする. 任意の $f,\ g\in\boldsymbol{H}$ に対して次の条件を満たす複素数 $(f,\ g)$ が定まるとき, $(f,\ g)$ を f と g との**内積**という:

(27. 1)　$\begin{cases}(f,\ f)\geqq 0;\ (f,\ f)=0 \text{ となるのは } f=0 \text{ のとき, かつそのときに} \\ \text{かぎる,}\end{cases}$

(27. 2)　$(f,\ g)=\overline{(g,\ f)},$

(27. 3)　$\begin{cases}(f+g,\ h)=(f,\ h)+(g,\ h), \\ (\alpha f,\ g)=\alpha(f,\ g)\ (\alpha\text{: 複素数}).\end{cases}$

これは, §22 で述べた函数空間 L^2 における内積や, 有限次元の複素ベクトル空間における内積の概念を抽象化したものである. (27. 2), (27. 3) から

(27. 4)　$\begin{cases}(f,\ g+h)=(f,\ g)+(f,\ h), \\ (f,\ \alpha g)=\overline{\alpha}(f,\ g);\end{cases}$

なぜならば

$$\begin{cases}(f,\ g+h)=\overline{(g+h,\ f)}=\overline{(g,\ f)}+\overline{(h,\ f)}=(f,\ g)+(f,\ h), \\ (f,\ \alpha g)=\overline{(\alpha g,\ f)}=\overline{\alpha(g,\ f)}=\overline{\alpha}(f,\ g).\end{cases}$$

内積の定義された線型空間 $\boldsymbol{H}$ において, $\|f\|=(f,\ f)^{1/2}$ と定義し, これを f の**ノルム**と呼ぶ. このとき

補助定理 1. $|(f,\ g)|\leqq\|f\|\cdot\|g\|$ (**Schwarz の不等式**). *)

証明. $f=0$ のときは $(f,\ g)=(0f,\ g)=0(f,\ g)=0$ により明らか, $f\neq 0$ ならば $\|f\|>0$ であり, 任意の複素数 α に対して

$$(\alpha f-g,\ \alpha f-g)=\|\alpha f-g\|^2\geqq 0$$

すなわち

$$|\alpha|^2\|f\|^2-\alpha(f,\ g)-\overline{\alpha}(g,\ f)+\|g\|^2\geqq 0$$

だから, $\alpha=(g,\ f)/\|f\|^2$ とおくと

---

*) これは §22 で述べた函数空間 L^2 における Schwarz の不等式の抽象化である. この補助定理 1 および次の補助定理 2 の証明は, それぞれ §22 の補助定理 2 および 3 と重複するが, 函数空間をはなれて一般的にできる議論として, もう一度ここで述べておく.

$$\frac{|(f,\ g)|^2}{\|f\|^2}-\frac{(g,\ f)(f,\ g)}{\|f\|^2}-\frac{\overline{(g,\ f)}(g,\ f)}{\|f\|^2}+\|g\|^2\geqq 0.$$

これに (27. 2) を代入して整頓し，両辺に $\|f\|^2$ (>0) をかけると

$$-|(f,\ g)|^2+\|f\|^2\|g\|^2\geqq 0$$

となるから，はじめの不等式が得られる．

補助定理 2. 上に定義したノルム $\|f\|=(f,\ f)^{1/2}$ は，§22 で定義した線型空間におけるノルムの条件を満たす，すなわち

（1） $\|f\|\geqq 0$; $f=0$ のとき，かつそのときにかぎり $\|f\|=0$;

（2） $\|\alpha f\|=|\alpha|\cdot\|f\|$ （α は複素数）;

（3） $\|f+g\|\leqq\|f\|+\|g\|$.

従って内積の定義された線型空間 $\boldsymbol{H}$ は，このノルムで線型ノルム空間になる．

証明. (1), (2) は内積の性質から明らかである．(3) は，補助定理 1 を使って，次のようにしてわかる：

$$\|f+g\|^2=(f+g,\ f+g)\leqq\|f\|^2+|(f,\ g)|+|(g,\ f)|+\|g\|^2$$
$$\leqq\|f\|^2+2\|f\|\cdot\|g\|+\|g\|^2=(\|f\|+\|g\|)^2,$$

この両辺の正の平方根をとればよい．（証明終）

内積 $(f,\ g)$ の定義せられた線型空間 $\boldsymbol{H}$ がノルム $\|f\|=(f,\ f)^{1/2}$ に関して完備（§22 参照）なとき，$\boldsymbol{H}$ を **Hilbert 空間**と呼ぶ．例えば §22 に述べた函数空間 L^2 は Hilbert 空間である．（内積の性質やノルムに関する完備性などは §22 で証明した．）また次の‘数列空間’ l^2 も Hilbert 空間である．

$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\xi_\nu|^2<\infty$ なる複素数列 $x=\{\xi_\nu\}$ の全体を l^2 と書く．*) $x=\{\xi_\nu\}\in l^2$, $y=\{\eta_\nu\}\in l^2$ および複素数 α に対して $x+y=\{\xi_\nu+\eta_\nu\}$, $\alpha x=\{\alpha\xi_\nu\}$ と定義すると，l^2 は線型空間になる．さらに $x,\ y$ を上のとおりとするとき，

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\xi_\nu|\cdot|\eta_\nu|\leqq\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}|\xi_\nu|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}|\eta_\nu|^2\right\}^{1/2}<\infty$$

なることは容易に証明できる**)から，

$$(x,\ y)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\xi_\nu\overline{\eta_\nu} \tag{27. 5}$$

が定義せられて内積の条件を満たす．さらに l^2 はノルム $\|x\|=(x,\ x)^{1/2}=\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}|\xi_\nu|^2\right\}^{1/2}$

*) l_2 とも書く．l^2 も l_2 も‘スモール・エル・ツー’(small l two) と読む．

**) 例えば付録の (4) 式において $u_\nu=|\xi_\nu|$, $v_\nu=|\eta_\nu|$ としてから $N\to\infty$ とすればよい．

に関して完備である（付録§4，定理 2）から，l^2 は Hilbert 空間になる．

一般に f_n，$f\in \boldsymbol{H}$，$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$ のとき，簡単に $f_n\to f$ と書くことがある．

定理 27. 1. $f_n\to f$，$g_n\to g$ ならば $\|f_n\|\to\|f\|$，$(f_n, g_n)\to(f, g)$；すなわち $\boldsymbol{H}$ におけるノルム，内積は $\boldsymbol{H}$ の点の連続函数である．

証明． $\|f_n\|=\|(f_n-f)+f\|\leqq\|f_n-f\|+\|f\|$ だから，$\|f_n\|-\|f\|\leqq\|f_n-f\|$．同様に $\|f\|-\|f_n\|\leqq\|f-f_n\|$．よって $|\,\|f_n\|-\|f\|\,|\leqq\|f_n-f\|\to 0$ $(n\to\infty)$．従って

$$|(f_n, g_n)-(f, g)|\leqq|(f_n, g_n)-(f_n, g)|+|(f_n, g)-(f, g)|$$
$$\leqq\|f_n\|\cdot\|g_n-g\|+\|f_n-f\|\cdot\|g\|\to 0 \quad (n\to\infty).$$ （証明終）

Euclid 空間において，二つのベクトルの内積が 0 であるときその二つのベクトルは直交するというが，この概念を一般にして，Hilbert 空間 $\boldsymbol{H}$ の中の f，g に対しても，$(f, g)=0$ のとき f と g とは**直交する**という．例えば $\boldsymbol{H}=L^2(-\pi, \pi)$ のとき，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cdot\sin x\,dx=0$$

であるから，$\cos x$ と $\sin x$ とは $L^2(-\pi, \pi)$ において直交する．

Hilbert 空間 $\boldsymbol{H}$ の中の系列

(27. 6)　$$S=\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots\}$$

があって

$$m\neq n \quad \text{ならば} \quad (\varphi_m, \varphi_n)=0$$

であるとき，$\boldsymbol{S}$ は $\boldsymbol{H}$ の中の**直交系**であるという*)；特にすべての $\varphi_n\in \boldsymbol{S}$ が $\|\varphi_n\|=1$ となるとき，$\boldsymbol{S}$ は**正規直交系**であるという．すなわち，(27. 6) なる $\boldsymbol{S}$ が正規直交系であるとは，

$$(\varphi_m, \varphi_n)=\delta_{mn}$$

となることである．ここに δ_{mn} は **Kronecker**（クロネッカー）**のデルタ**と呼ばれる記号で

$$\delta_{mn}=\begin{cases}1 & (m=n \text{ のとき})\\ 0 & (m\neq n \text{ のとき})\end{cases}$$

を表わす．

一般に，線型空間の中の有限個のベクトル $f_1, \cdots, f_n$ があって，その一次結合 $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f_j$ が 0 になるのは $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$ の場合にかぎるとき，ベクトル $f_1, \cdots, f_n$ は一次独

*) Hilbert 空間を一般的に考える場合は，直交系 $\boldsymbol{S}$ は可算集合とはかぎらないが，本書では $\boldsymbol{S}$ が可算集合の場合だけを考えれば十分であるから，簡単のためにそうしておく．

立（または線型独立）であるという．これに対して，すべてが 0 ではない $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を適当にとって $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j = 0$ なるようにできるとき，ベクトル $f_1, \cdots, f_n$ は**一次従属**（または**線型従属**）であるという．

$f_1, \cdots, f_n$ が一次独立ならば，その中のどの f_j も 0 ベクトルではない．なぜならば $f_k=0$ とすると，$\alpha_j=\delta_{jk}$ $(j=1, \cdots, n)$ とすることにより $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j=0$ となるからである．

線型空間の部分集合 S が一次独立（または線型独立）であるとは，S の中の任意の有限個のベクトルが一次独立なことである．例えば Hilbert 空間 H における正規直交系 $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots\}$ は一次独立である．なぜならば

$$\alpha_1\varphi_1+\cdots+\alpha_n\varphi_n=0$$

とすると，$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ の中の任意の一つの φ_j と上の式との内積を作れば，正規直交性によって $\alpha_j=0$ となるからである．

次の定理は，Hilbert 空間の中の一次独立な系から正規直交系を作る一つの方法を与える．

定理 27. 2. Hilbert 空間 H の部分集合 $S_0=\{f_1, f_2, \cdots\}$ が一次独立ならば，

$$\varphi_1=\frac{f_1}{\|f_1\|},\quad \varphi_2=\frac{f_2-(f_2, \varphi_1)\varphi_1}{\|f_2-(f_2, \varphi_1)\varphi_1\|},\quad \cdots\cdots\cdots,$$

一般に

$$\varphi_n=\frac{f_n-\sum_{\nu=1}^{n-1}(f_n, \varphi_\nu)\varphi_\nu}{\left\|f_n-\sum_{\nu=1}^{n-1}(f_n, \varphi_\nu)\varphi_\nu\right\|} \qquad (n\geqq 2)$$

が定義せられ，$S=\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots\}$ は正規直交系をなす．このとき任意の n に対して，φ_n は $f_1, \cdots, f_n$ の一次結合であり，f_n は $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ の一次結合である．（上の操作を **Schmidt**（シュミット）**の直交化**という．）

証明．まず S_0 が一次独立なことにより $f_1\neq 0$，従って $\|f_1\|>0$ だから，φ_1 が定義せられ $\|\varphi_1\|=1$ である．次に $\{f_1, f_2\}$ が一次独立だから，φ_2 を定義する式の分母は 0 でない．従って φ_2 が定義せられ $\|\varphi_2\|=1$ であって，φ_2 は f_1, f_2 の一次結合であり，f_2 は φ_1, φ_2 の一次結合である．一般に $\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}$ が定義せられ，$1\leqq\nu\leqq n-1$ なる各 ν に対して φ_ν は $f_1, \cdots, f_\nu$ の一次結合になっているとすると，φ_n を定義する式の分母は $\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}, f_n$ の，従って $f_1, \cdots, f_{n-1}, f_n$ の一次結合のノルムであるから，$\{f_1, \cdots, f_n\}$ が一次独立なことにより，その分母は 0 でない．従って φ_n が定義せられ $\|\varphi_n\|=1$ であって，φ_n は $f_1, \cdots, f_n$ の一次結合であり，f_n は $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ の一次結合である．こ

のようにしてすべての φ_n が定義せられ，$\|\varphi_n\|=1$ なることおよび定理の最後の主張も同時に証明されたことになるから，S が直交系をなすことを示せばよい．まず $(\varphi_2, \varphi_1)=0$ なることは，φ_2 を定義する式と φ_1 との内積を作って $(\varphi_1, \varphi_1)=1$ を使えばすぐに出る．一般に $\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}$ がどの二つも互いに直交することがわかったとき，$1\leqq k\leqq n-1$ なる任意の k に対して，φ_n を定義する式と φ_k との内積を作ると，$(\varphi_\nu, \varphi_k)=\delta_{\nu k}$ $(1\leqq\nu\leqq n-1,\ 1\leqq k\leqq n-1)$ を使って $(\varphi_n, \varphi_k)=0$ が得られる．従って $\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}, \varphi_n$ がどの二つも互いに直交する．このようにして S が直交系をなすことがわかる．

例 1. l^2 において

$$\begin{cases}\varphi_1=(1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots)\\ \varphi_2=(0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots)\\ \varphi_3=(0,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 0,\ \cdots)\\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_n=(0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ \overset{n}{\breve{1}},\ \cdots)\\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

とすると，$\{\varphi_n\}$ は正規直交系である．これは Euclid 空間の場合の‘座標軸の方向の単位ベクトル’の全体に相当する．

例 2. $L^2(-\pi,\ \pi)$ において

$$\begin{cases}S_1=\{\cos nx;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}\\ S_2=\{\sin nx;\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}\end{cases} \tag{27. 7}$$

はどちらも直交系であり，また S_1 と S_2 とを合併したものを S とすると，S も直交系である．なぜならば

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \pi & (m=n\neq 0)\\ 2\pi & (m=n=0),\end{cases}\\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \pi & (m=n\neq 0),\end{cases}\\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\,dx=0\end{cases} \tag{27. 8}$$

となるからである*)．しかし (27. 8) により S_1, S_2 は，従って S も正規ではない；正

*) 三村征雄編，大学演習微分積分学（裳華房）142 頁，問題 2 の解答を参照．そこでは積分区間が $(0,\ 2\pi)$ になっているが，三角函数の周期性により $(-\pi,\ \pi)$ にしても同じである．

規直交系にするには (27. 7) のかわりに

$$(27.\ 7')\qquad \begin{cases} S_1=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx;\ n=1,\ 2,\ \cdots\right\} \\ S_2=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx;\ n=1,\ 2,\ \cdots\right\} \end{cases}$$

としておけばよい．

例 2′. $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx};\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\right\}$ が $L^2(-\pi,\ \pi)$ において正規直交系をなすことは，積分の計算によって容易にわかる．この函数系を実数部分と虚数部分に分けたものが，上の例 2 の函数系である．

例 3. Legendre (ルジャンドル) の多項式*)

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

に対して

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \dfrac{2}{2n+1} & (m=n)\end{cases}$$

が成立するから，

$$\{P_n(x);\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$$

は $L^2(-1,\ 1)$ における直交系である；正規にするには $P_n(x)$ のかわりに $\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}P_n(x)$ をとればよい．

例 4. Hermite (エルミット) の多項式**)

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

および Laguerre (ラゲール) の多項式***)

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

に対して，それぞれ

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ 2^n n!\sqrt{\pi} & (m=n)\end{cases}$$

---

*) Legendre の球函数ともいう．三村編，前掲書，33 頁の問題 17 および 141 頁の問題 21 参照．

), *) 三村編，前掲書，141 頁の問題 22 および 23 参照．

および

$$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}dx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ (n!)^2 & (m=n)\end{cases}$$

が成立するから，

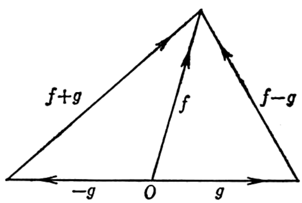
$$\{H_n(x)e^{-x^2/2};\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\},\quad \{L_n(x)e^{-x/2};\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$$

はそれぞれ $L^2(-\infty,\ \infty)$，$L^2(0,\ \infty)$ で直交系を作る．正規にするには $H_n(x)$，$L_n(x)$ をそれぞれ $(2^n n!)^{1/2}\pi^{1/4}$，$n!$ で割っておけばよい．

問 1. $\boldsymbol{H}$ を Hilbert 空間とすると，任意の $f,\ g\in\boldsymbol{H}$ に対して

i) $\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2(\|f\|^2+\|g\|^2)$，

ii) $(f,\ g)=\dfrac{1}{4}(\|f+g\|^2-\|f-g\|^2+i\|f+ig\|^2-i\|f-ig\|^2)$．



（上の i) は初等幾何でよく知られた‘三角形の中線定理’である——右図参照．ii) は Hilbert 空間のノルムを使って内積を表わす式である．）

問 2. 例 2 の S_1，S_2 のそれぞれは $L^2(0,\ \pi)$ における直交系であるが，この二つを合せた S は $L^2(0,\ \pi)$ においては直交系ではない．

問 3. $p(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続函数，$q(x)$ は $[a,\ b]$ で実数値をとる連続函数とする．或る実数 λ に対して，微分方程式

(27. 9)　$$y''+\{\lambda p(x)-q(x)\}y=0$$

の解で境界条件

(27. 10)　$$y(a)=y(b)=0$$

を満たし恒等的に 0 ではないものが存在するとき，*) その λ を，境界条件 (27. 10) を与えた微分方程式 (27. 9) の固有値といい，そのときの解 $y(x)$ を固有値 λ に対する固有函数という．相異なる二つの固有値 λ_1，λ_2 に対する固有函数を $y_1(x)$，$y_2(x)$ とすると，$\varphi_1(x)=\sqrt{p(x)}\,y_1(x)$ と $\varphi_2(x)=\sqrt{p(x)}\,y_2(x)$ とは $L^2(a,\ b)$ で直交することを証明せよ．

注意 1. 任意の実数 λ に対して，境界条件 (27. 10) を満たす微分方程式 (27. 9) の解で恒等的に 0 ではないものが存在するとはかぎらない．例えば $y''+\lambda y=0$，$y(0)=y(\pi)=0$ を考えると，$\lambda=n^2$ (n は自然数) のときにかぎり $y=\sin nx$ なる解がある．（この場合に問 3 の事実が成立することは，問 2 で証明されている．）

注意 2. 問 3 において閉区間 $[a,\ b]$ のかわりに開区間 $(a,\ b)$ をとり（無限区間でもよい），$x\to a+0$ 或いは $x\to b-0$ のとき $p(x)$ が 0 または ∞ に近づき，また $q(x)$ が

*)　すぐ後の注意 1 を見よ．

有界でない場合にも，問3の事実は（境界条件の意味を適当に拡張することにより）真であることが証明される．多くの重要な直交函数系は，このような境界条件を与えた微分方程式の固有函数の系として得られる．これらのことについては微分方程式の専門書を見られたい．

§28. Fourier 級数

N 次元 Euclid 空間において，$\{\varphi_1, \cdots, \varphi_N\}$ を互いに直交する単位ベクトルの系とすると，任意のベクトル f は

(28. 1) $$f=\alpha_1\varphi_1+\cdots+\alpha_N\varphi_N$$

と一意的に表わされ，

(28. 2) $$\alpha_n=(f,\ \varphi_n) \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$

が成立する；(28. 1) の両辺と φ_n との内積を作って直交関係 $(\varphi_m,\ \varphi_n)=\delta_{mn}$ を使えば (28. 2) が得られる．このことを Hilbert 空間に拡張して，次のことを考察する．

Hilbert 空間 $\boldsymbol{H}$ において，一つの正規直交系 $\{\varphi_n\}$ が与えられたとする．或る $f\in\boldsymbol{H}$ が，$\boldsymbol{H}$ のノルムに関する収束の意味で

(28. 1′) $$f=\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2+\cdots+\alpha_n\varphi_n+\cdots$$

の形の‘級数’に表わされるものと仮定し，この両辺と φ_n との内積を作るとき，右辺において内積の連続性（定理 27. 1）と $\{\varphi_n\}$ の直交関係により

$$(f,\ \varphi_n)=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{N}\alpha_\nu\varphi_\nu,\ \varphi_n\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{\nu=1}^{N}\alpha_\nu(\varphi_\nu,\ \varphi_n)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu(\varphi_\nu,\ \varphi_n)=\alpha_n;$$

すなわち (28. 2) と同じ形の式

(28. 2′) $$\alpha_n=(f,\ \varphi_n) \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

が得られる．(28. 2′) で定義される $\{\alpha_n\}$ を f の（正規直交系 $\{\varphi_n\}$ に関する）**Fourier**（フーリエ）**係数**といい，Fourier 係数を使って (28. 1′) の右辺の形に書いた‘級数’を **Fourier 級数**という．この形式的に書いた級数の収束や，その極限がもとの f になるかどうかを考えよう．まず

定理 28. 1 (**Riesz-Fischer**（リース・フィッシャー）**の定理**). $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2<\infty$ なる任意の複素数列 $\{\alpha_n\}$ に対して

$$\tilde{f}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_n, \qquad (\tilde{f},\ \varphi_n)=\alpha_n$$

なる $\tilde{f}\in\boldsymbol{H}$ が存在する．

証明. $f_p=\sum_{n=1}^{p}\alpha_n\varphi_n$ とおくと，$\{\varphi_n\}$ の直交関係により，$q>p$ ならば

$$\|f_q-f_p\|^2=\left(\sum_{n=p+1}^{q}\alpha_n\varphi_n,\ \sum_{n=p+1}^{q}\alpha_n\varphi_n\right)=\sum_{n=p+1}^{q}|\alpha_n|^2\to 0\qquad (q>p\to\infty).$$

すなわち $\{f_p\}$ は $\boldsymbol{H}$ の中の基本列をなす．だから $\boldsymbol{H}$ の完備性により

$$\tilde{f}=\lim_{p\to\infty}f_p=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_n$$

が存在し，上に説明したように，内積の連続性によって $(\tilde{f},\ \varphi_n)=\alpha_n$ が得られる．

定理 28. 2. 任意の $f\in\boldsymbol{H}$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(f,\ \varphi_n)|^2\leqq\|f\|^2 \tag{28. 3}$$

(これを **Bessel** (ベッセル) **の不等式**という.)

証明. $(f,\ \varphi_n)=\alpha_n$ とおくと，$(\varphi_n,\ f)=\bar{\alpha}_n$ だから，任意の N に対して

$$0\leqq\left\|f-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\varphi_n\right\|^2=(f,\ f)-\sum_{n=1}^{N}\bar{\alpha}_n(f,\ \varphi_n)-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n(\varphi_n,\ f)+\sum_{m,n=1}^{N}\alpha_m\bar{\alpha}_n\delta_{mn}$$

$$=\|f\|^2-\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2-\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2+\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2=\|f\|^2-\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2.$$

だから $N\to\infty$ として $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2\leqq\|f\|^2$；これは (28. 3) を意味する．(証明終)

上の二つの定理により，任意の $f\in\boldsymbol{H}$ の Fourier 級数は或る $\tilde{f}\in\boldsymbol{H}$ に収束することがわかった．しかしその $\tilde{f}$ がもとの f を表わすとはかぎらない．例えば $\boldsymbol{H}=L^2(-\pi,\ \pi)$ において $\varphi_n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とすると，$\{\varphi_n\}$ は正規直交系であるが，$f(x)=\cos x$ に対しては $\alpha_n=(f,\ \varphi_n)=0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ となり $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_n=0\neq f$ である．この場合，$\boldsymbol{H}$ の中にどの φ_n とも直交するベクトル（例えば上の f）が存在しているわけであり，有限次元のベクトル空間に例えると，N 次元空間の中に N 個より少い数の φ_n しかとってないようなものである．そこで，‘すべての φ_n と直交するような $f\in\boldsymbol{H}$ は 0 以外には存在しない’ならば，任意の $f\in\boldsymbol{H}$ は Fourier 級数で表わされるのではないかと予想されるが，その予想の正しいことが次の定理 28. 3 によってわかる．

まず，Hilbert 空間 $\boldsymbol{H}$ における直交系 $\{\varphi_n\}$ があって，どの φ_n とも直交する $f\in\boldsymbol{H}$ は 0 以外に存在しないとき，直交系 $\{\varphi_n\}$ は**完全**であるという．例えば前§例 2 の $\boldsymbol{S}_1$ または $\boldsymbol{S}_2$ だけでは完全でないが，この二つを合わせた $\boldsymbol{S}$ は後に示すように完全である（定理 28. 5 の系）．完全性の定義においては，$\{\varphi_n\}$ が正規である必要はないが，本質的には正規直交系だけを考えればよいから，以下そうすることもある．

定理 28. 3. 正規直交系 $\{\varphi_n\}$ に対して，次の五つの命題は同等である；——

i)　$\{\varphi_n\}$ は完全である；

ii)　$f,\ g\in \boldsymbol{H}$ であって，すべての n に対して $(f,\ \varphi_n)=(g,\ \varphi_n)$ ならば，$f=g$ である；

iii)　任意の $f\in \boldsymbol{H}$ が $f=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_n$ $(\alpha_n=(f,\ \varphi_n))$ と Fourier 級数で表わされる；

iv)　任意の $f,\ g\in \boldsymbol{H}$ に対して，$\alpha_n=(f,\ \varphi_n)$，$\beta_n=(g,\ \varphi_n)$ とおくとき

(28. 4)
$$(f,\ g)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\overline{\beta}_n$$

が成立する．

v)　任意の $f\in \boldsymbol{H}$ に対する Bessel の不等式 (28. 3) において等号が成立する，すなわち

(28. 5)
$$\sum_{n=1}^{\infty}|(f,\ \varphi_n)|^2=\|f\|^2.$$

((28. 4), (28. 5) を **Parseval**（パーセバル）**の等式**という．)

証明．以下において，例えば‘i)⇒ii)’は‘i) ならば ii)’すなわち，i) から ii) が出ることを意味する．

i)⇒ii) の証明．すべての n に対して $(f-g,\ \varphi_n)=(f,\ \varphi_n)-(g,\ \varphi_n)=0$ だから，i) により $f-g=0$ すなわち $f=g$ である．

ii)⇒iii) の証明．$\tilde{f}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_n$（これは定理 28. 2 と定理 28. 1 により存在する）とおくと，(28. 1′) から (28. 2′) を出したようにして，すべての n に対して $(\tilde{f},\ \varphi_n)=\alpha_n=(f,\ \varphi_n)$（第二の等号は α_n の定義！）だから，ii) によって $f=\tilde{f}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_n$.

iii)⇒iv) の証明．$f_N=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\varphi_n$，$g_N=\sum_{n=1}^{N}\beta_n\varphi_n$，とおくと，iii) により $\|f_N-f\|\to 0$，$\|g_N-g\|\to 0$ $(N\to\infty)$ だから，内積の連続性（定理 27. 1）により $(f_N,\ g_N)\to(f,\ g)$ $(N\to\infty)$．一方 $\{\varphi_n\}$ の直交性により

(28. 6)
$$(f_N,\ g_N)=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\overline{\beta}_n$$

であり，$\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n\overline{\beta}_n|\leqq\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|^2\right)^{1/2}\leqq\|f\|\cdot\|g\|$（Bessel の不等式による）だから，(28. 6) で $N\to\infty$ とするとき右辺は絶対収束する級数になって，(28. 4) が得られる．

iv)⇒v) の証明．iv) において $f=g$ とおけばよい．

v)⇒i) の証明．すべての n に対して $(f,\ \varphi_n)=0$ となるような $f\in \boldsymbol{H}$ があるとすると，v) により $\|f\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(f,\ \varphi_n)|^2=0$ となるから $f=0$ である．だから $\{\varphi_n\}$ は完全

である．

こうして定理 28. 3 のすべての命題が同等なことがわかった．

定理 28. 4. $\{\varphi_n\}$ を $\boldsymbol{H}$ における直交系とする．任意の $f\in\boldsymbol{H}$ と任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\{\varphi_n\}$ の適当な一次結合 $\psi=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\varphi_n$ で，$\|f-\psi\|<\varepsilon$ となるものが存在するならば，$\{\varphi_n\}$ は完全直交系である．

証明． $\{\varphi_n\}$ が完全でないとすると，すべての n に対して $(f,\ \varphi_n)=0$ となるような $f\neq 0$ が存在する．このとき $\|f\|>0$ だから，仮定により

$$\left\|f-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\varphi_n\right\|<\frac{\|f\|}{2}$$

なる $\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_N$ がある．このとき，内積に対する Schwarz の不等式 (§27) により

$$\left|\left(f,\ f-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\varphi_n\right)\right|\leqq\|f\|\cdot\left\|f-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\varphi_n\right\|<\frac{\|f\|^2}{2}$$

であるが，一方 $(f,\ \varphi_n)=0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ により

$$\left|\left(f,\ f-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\varphi_n\right)\right|=\left|(f,\ f)-\sum_{n=1}^{N}\bar{\alpha}_n(f,\ \varphi_n)\right|=\|f\|^2(>0)$$

となるから矛盾である．（証明終）

系． $-\infty<a<b<\infty$ とし，$\{\varphi_n(x)\}$ を $L^2(a,\ b)$ における直交系とする．このとき，閉区間 $[a,\ b]$ で連続で $f(a)=f(b)$ なる任意の函数 $f(x)$ が $\{\varphi_n(x)\}$ の一次結合で一様に近似されるならば，$\{\varphi_n(x)\}$ は $L^2(a,\ b)$ において完全である．

このことの証明は定理 24. 5 の系と同様にすればよいから，読者の演習問題とする．

問 1. 上の系を証明せよ．

ここで完全直交系の例として，前 § 例 2 の三角函数系，例 2′ の指数函数系，例 3 の Legendre 多項式が完全であることを証明しておこう．

定理 28. 5. 函数系 $S=\{e^{inx};\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}$ は $L^2(-\pi,\ \pi)$ において完全である．

証明． 定理 28. 4 の系により，閉区間 $[-\pi,\ \pi]$ で連続で $f(-\pi)=f(\pi)$ なる任意の函数 $f(x)$ が，S に属する函数の一次結合で一様に近似されることを示せばよい．まず $0<\alpha<\pi$ なる任意の α を固定するとき，

$$\text{すべての } x \text{ に対して } \frac{1+\cos x}{1+\cos\alpha}\geqq 0,\ \text{特に } \inf_{|x|<\alpha/2}\frac{1+\cos x}{1+\cos\alpha}>1$$

だから

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos x}{1+\cos\alpha}\right)^n dx\geqq\lim_{n\to\infty}\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\left(\frac{1+\cos x}{1+\cos\alpha}\right)^n dx=\infty.$$

よって，各 $\alpha\ (0<\alpha<\pi)$ に対して適当な自然数 n_α をとって

(28. 7) $$c_\alpha=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos x}{1+\cos\alpha}\right)^{n_\alpha}dx \text{ とおくとき } \lim_{\alpha\downarrow 0}c_\alpha=\infty$$

となるようにできる.*) ここで

(28. 8) $$K_\alpha(x)=\frac{1}{c_\alpha}\left(\frac{1+\cos x}{1+\cos\alpha}\right)^{n_\alpha}$$

とおくと，すべての x に対して $K_\alpha(x)\geqq 0$ であって，

(28. 9) $$\int_{-\pi}^{\pi}K_\alpha(x-y)dy=1,\quad \alpha<|x-y|<2\pi-\alpha \text{ ならば } K_\alpha(x-y)<\frac{1}{c_\alpha}.$$

さて $f(-\pi)=f(\pi)$ により，f は 2π を周期とし，$(-\infty,\ \infty)$ で連続な函数に拡張されるから，そのように拡張しておいて

(28. 10) $$f_\alpha(x)=\int_{-\pi}^{\pi}K_\alpha(x-y)f(y)dy \qquad (0<\alpha<\pi)$$

と定義する．このとき (28. 8) と $\cos(x-y)=\frac{1}{2}(e^{ix}e^{-iy}+e^{-ix}e^{iy})$ なることにより，$f_\alpha(x)$ が S に属する函数の一次結合になることがわかる．よって，定理の証明には

(28. 11) $f_\alpha(x)$ が $[-\pi,\ \pi]$ で一様に $f(x)$ に収束する

ことを示せばよい．以下その証明．$f(x)$ は $(-\infty,\ \infty)$ で連続な周期函数だから，有界かつ一様連続である；すなわち

$$|f(x)|\leqq M \qquad (-\infty<x<\infty)$$

なる M があり，また任意の $\varepsilon>0$ に対して，適当な $\delta>0$ をとると

$$|x-y|<\delta \text{ ならば } |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

となるが，このとき (28. 7) により

$$0<\alpha<\delta \text{ ならば } c_\alpha>M/\varepsilon$$

が同時に成立するように δ をとれる．だから (28. 9) により，$0<\alpha<\delta$ ならば任意の $x\in[-\pi,\ \pi]$ に対して

$$|f_\alpha(x)-f(x)|=\left|\int_{-\pi}^{\pi}K_\alpha(x-y)\{f(y)-f(x)\}dy\right|$$
$$<\int_{|x-y|\leqq\alpha}K_\alpha(x-y)\varepsilon dy+\int_{\alpha<|x-y|<2\pi-\alpha}\frac{1}{c_\alpha}\cdot 2M\,dy$$
$$\leqq\varepsilon+4\pi\varepsilon=(1+4\pi)\varepsilon.$$

これで (28. 11) が証明された．

系． 三角函数系 $\{1,\ \cos nx,\ \sin nx;\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ は $L^2(-\pi,\ \pi)$ において完全である．

---

*) 例えば，各 α に対して $c_\alpha>1/\alpha$ なるように n_α をとれる．

このことは，公式 $e^{inx}=\cos nx+i\sin nx$ と上の定理（および定理 28. 4 の系）によって明らかであるが，上の定理の証明がそのままこの系の証明にもなる．すなわち (28. 10) の右辺において $\{1+\cos(x-y)\}^{n\alpha}$ に二項定理と三角函数の加法定理を適用し，y について積分してから，いわゆる‘$\cos x$, $\sin x$ の積を和になおす公式’をくりかえして使うことにより，$f_\alpha(x)$ は $\cos nx$, $\sin nx$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ の一次結合になる．

定理 28. 6. Legendre の多項式系 $\{P_n(x);\ n=0, 1, 2, \cdots\}$ は $L^2(-1, 1)$ において完全である．

証明. 前の定理と同様に，$[-1, 1]$ の上の任意の連続函数 $f(x)$ が $\{P_n(x)\}$ の一次結合によって $[-1, 1]$ で一様に近似されることを示せばよい．ところが Weierstrass の多項式近似定理 24. 5 により，$f(x)$ は多項式によって $[-1, 1]$ で一様に近似される．一方 $n=0, 1, 2, \cdots$ に対して $P_n(x)$ はちょうど n 次の多項式であるから，任意の整数 $n\geqq 0$ に対する x^n は——従って x の任意の多項式は $\{P_n(x)\}$ の中の函数の一次結合で表わされる．だからはじめの $f(x)$ が，$\{P_n(x)\}$ の中の函数の一次結合によって $[-1, 1]$ で一様に近似される．

問 2. $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2A}}e^{\frac{in\pi x}{A}};\ n=0, \pm1, \pm2, \cdots\right\}$ は $L^2(-A, A)$ における完全正規直交系である．

最後に，Hermite 函数系 $\{H_n(x)e^{-x^2/2}\}$, Laguerre 函数系 $\{L_n(x)e^{-x/2}\}$（前§例 4）がそれぞれ $L^2(-\infty, \infty)$, $L^2(0, \infty)$ の中で完全系になっていることの，初等的証明を与えておく．

I) **Hermite 函数系の完全性．** 任意の $A>0$ に対して，$L^2(-A, A)$ におけるノルムを $\|\cdot\|_A$ と書く．また $(-\infty, \infty)$ の上の可測函数 $f(x)$ に対して

$$\|f\|_h=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2e^{-x^2}dx\right\}^{1/2} \tag{28. 12}$$

と定義する（h は Hermite の頭文字）．任意の $n\geqq 0$ に対して $H_n(x)$ はちょうど n 次の多項式であるから，x の任意の多項式は $\{H_n(x)\}$ の中の函数の一次結合になる．また定理 24. 2 により $L(-\infty, \infty)$ は $L^2(-\infty, \infty)$ の中で稠密であり，$f\in L(-\infty, \infty)$ ならば $g(x)=f(x)e^{x^2/2}$ も $L(-\infty, \infty)$ に属する．だから任意の $g\in L(-\infty, \infty)$ と任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\|g-p\|_h<\varepsilon \tag{28. 13}$$

となるような多項式 $p(x)$ が存在することを示せば，定理 28. 4 により Hermite 函数系の完全性が証明されたことになる．さて，$(-A, A)\supset \mathrm{Car}\,(g)$ なるかぎり $\|g\|_A$ は A に関係しないから，そのような A を十分大きくとれば

$$\frac{e^{-A^2}}{1-e^{-2A^2}}<\frac{\varepsilon^2}{(3\|g\|_A+\varepsilon)^2} \tag{28. 14}$$

となる．さらに，

$$\varphi_n(x)=\exp(in\pi x/A) \qquad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

とおくと，上の問２により

(28. 15)
$$\varphi(x)=\sum_{n=-l}^{l}\alpha_n\varphi_n(x)$$

なる形の函数 $\varphi(x)$ で

(28. 16)
$$\|g-\varphi\|_A<\varepsilon/3$$

となるものが存在する．このとき，$\varphi(x)$ が周期 $2A$ の周期函数であることにより，$k=1,\ 2,\ \cdots$ に対して

$$\left\{\int_{(2k-1)A}^{(2k+1)A}|\varphi(x)|^2e^{-x^2}dx\right\}^{1/2}\leqq\left\{\int_{-A}^{A}|\varphi(x)|^2dx\right\}^{1/2}e^{-(2k-1)A^2/2}$$
$$\leqq(\|\varphi-g\|_A+\|g\|_A)e^{-(2k-1)A^2/2}<(\|g\|_A+\varepsilon/3)e^{-(2k-1)A^2/2}.$$

だから (28. 14) により

$$\int_A^\infty|\varphi(x)|^2e^{-x^2}dx\leqq\sum_{k=1}^{\infty}\left(\|g\|_A+\frac{\varepsilon}{3}\right)^2e^{-(2k-1)A^2}<\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2.$$

$\int_{-\infty}^{-A}|\varphi(x)|^2e^{-x^2}dx$ も同様に評価される．これらの評価式と (28. 16) および A のとり方により

(28. 17)
$$\|g-\varphi\|_h{}^2\leqq\|g-\varphi\|_A{}^2+\int_{|x|\geqq A}|\varphi(x)|^2e^{-x^2}dx$$
$$<\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2+2\cdot\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2=\frac{\varepsilon^2}{3}.$$

次に

$$p_{nN}(x)=\sum_{\nu=1}^{N-1}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{in\pi x}{A}\right)^\nu \quad (N>0,\ |n|\leqq l),\quad a=\sum_{n=-l}^{l}|\alpha_n|$$

とおくとき，十分大きい C をとれば

$$\int_C^\infty\exp\left(2\left|\frac{l\pi x}{A}\right|-x^2\right)dx<\left(\frac{\varepsilon}{6a}\right)^2$$

となり，この C に対して N を適当にとれば，$|n|\leqq l$ なるすべての n に対して

$$|x|\leqq C \text{ なるかぎり } |\varphi_n(x)-p_{nN}(x)|<\frac{\varepsilon}{6a}$$

となる．一方任意の N，任意の $x\in(-\infty,\ \infty)$ および任意の n に対して

$$|\varphi_n(x)-p_{nN}(x)|\leqq\sum_{\nu=N}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left|\frac{l\pi x}{A}\right|^\nu<\exp\left|\frac{l\pi x}{A}\right|$$

である．だから $|n|\leqq l$ ならば

$$\|\varphi_n-p_{nN}\|_h{}^2<\left(\frac{\varepsilon}{6a}\right)^2\int_{-C}^{C}e^{-x^2}dx+2\int_C^\infty\exp\left(2\left|\frac{l\pi x}{A}\right|-x^2\right)dx$$
$$<\left(\frac{\varepsilon}{6a}\right)^2(\sqrt{\pi}+2)<\left(\frac{\varepsilon}{3a}\right)^2.$$

よって，

$$p(x)=\sum_{n=-l}^{l}\alpha_n p_{nN}(x)$$

は x の多項式であって

$$\|\varphi-p\|_h\leqq\sum_{n=-l}^{l}|\alpha_n|\cdot\|\varphi_n-p_{nN}\|_h<\frac{\varepsilon}{3a}\sum_{n=-l}^{l}|\alpha_n|=\frac{\varepsilon}{3}$$

となる．これと (28. 17) により

$$\|g-p\|_h\leqq\|g-\varphi\|_h+\|\varphi-p\|_h<(\varepsilon/\sqrt{3})+(\varepsilon/3)<\varepsilon$$

となり，(28. 13) が得られた．

II) **Laguerre 函数系の完全性**．上の I) と同様に，台が $(0,\ \infty)$ の中の有界閉区間であるような任意の連続函数 $f(x)$ と任意の $\varepsilon>0$ とに対して

(28. 18)
$$\int_0^\infty|f(x)-p(x)|^2e^{-x}dx<\varepsilon^2$$

となるような多項式 $p(x)$ が存在することを示せばよい．今

(28. 19)
$$g(y)=f(2y^2)\qquad(-\infty<y<\infty)$$

とおくと $g\in L(-\infty,\ \infty)$ であるから，I) によって

$$\|g-q\|_h<\varepsilon/\sqrt{2}$$

なる多項式 $q(y)$ がある．$\bar{g}(y)=g(-y)$，$\bar{q}(y)=q(-y)$（$^-$ は共役複素数の記号ではない！）とおくと，$\|\bar{g}-\bar{q}\|_h<\varepsilon/\sqrt{2}$ であるから

(28. 20)
$$\left\|\frac{g+\bar{g}}{2}-\frac{q+\bar{q}}{2}\right\|_h\leqq\frac{\|g-q\|_h}{2}+\frac{\|\bar{g}-\bar{q}\|_h}{2}<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

ところが (28. 19) により $g=\bar{g}=\dfrac{1}{2}(g+\bar{g})$ であり，また $\dfrac{1}{2}\{q(y)+\bar{q}(y)\}$ は y の偶数次の項のみを含むから

$$\frac{q(y)+\bar{q}(y)}{2}=p(2y^2)$$

となるような x の多項式 $p(x)$ が存在する．だから (28. 20) により

(28. 21)
$$\int_{-\infty}^\infty|g(y)-p(2y^2)|^2e^{-y^2}dy<\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

だから，変数変換 $x=2y^2$ により

$$\int_0^\infty|f(x)-p(x)|^2e^{-x}dx=4\int_0^\infty|f(2y^2)-p(2y^2)|^2e^{-2y^2}y\,dy$$

$$\leqq4\int_0^\infty|g(y)-p(2y^2)|^2e^{-y^2}dy\qquad((28.\ 19)\ と\ e^{-y^2}y<1\ により)$$

$$=2\int_{-\infty}^\infty|g(y)-p(2y^2)|^2e^{-y^2}dy<\varepsilon^2\qquad((28.\ 21)\ により).$$

（証明終）

§29. Fourier 変換

$L^2(-A, A)$ においては $\left\{\frac{1}{\sqrt{2A}}e^{\frac{in\pi x}{A}};\ n=0, \pm1, \pm2, \cdots\right\}$ が完全正規直交系をなす（前§問2）から，任意の $f(x)\in L^2(-A, A)$ に対して

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2A}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_f\left(\frac{n}{A}\right)\cdot e^{\frac{in\pi x}{A}} \qquad (\text{平均収束}), \tag{29. 1}$$

ここに

$$\alpha_f\left(\frac{n}{A}\right)=\frac{1}{\sqrt{2A}}\int_{-A}^{A}e^{-\frac{in\pi x}{A}}f(x)dx \tag{29. 2}$$

となる．ここで A を $\frac{A}{2}$ にしてから $\sqrt{A}\,\alpha_f\left(\frac{2n}{A}\right)$ を $\hat{f}\left(\frac{n}{A}\right)$ と書くと (29. 2), (29. 1) は

$$\hat{f}\left(\frac{n}{A}\right)=\int_{-A/2}^{A/2}e^{-2\pi i\frac{n}{A}x}f(x)dx, \tag{29. 2'}$$

$$f(x)=\frac{1}{A}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(\frac{n}{A}\right)e^{2\pi i\frac{n}{A}x} \tag{29. 1'}$$

となるから，$A\to\infty$ とすると形式的に $\sum$ が積分になって

$$\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi i\xi x}f(x)dx, \tag{29. 2''}$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi i\xi x}\hat{f}(\xi)d\xi \tag{29. 1''}$$

となる．しかしこれらの式の積分は，任意の $f\in L^2(-\infty, \infty)$ に対して普通の意味で存在するとはかぎらない．そこで，まず $f\in L^1(-\infty, \infty)$ に対して $\hat{f}(\xi)$ を (29, 2'') によって定義し，(29. 2''), (29. 1'') の右辺の意味を適当に拡張することにより，これらの式が任意の $f\in L^2(-\infty, \infty)$ に対して成立することを示そう．なおこの§では $R^1=(-\infty, \infty)$ でなく R^N の上で考えることにし，L^p ($p=1$ または 2), L_∞ などの記号を §24 で述べた意味に使うことにする．また R^N の上での積分を書くときは，積分記号 $\int$ の下の積分範囲 R^N を省略する．

函数 $f\in L^1$ の **Fourier 変換**とは，$\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_N)\in R^N$ の函数

$$\hat{f}(\xi)=\int e^{-2\pi i\xi\cdot x}f(x)dx \qquad (\text{ただし } \xi\cdot x=\xi_1x_1+\cdots+\xi_Nx_N) \tag{29. 3}$$

のことである．このとき $\mathfrak{F}f=\hat{f}$ と書き，この式で定義される線型作用素 (§25) $\mathfrak{F}$ のことも **Fourier 変換**という．(29. 3) から明らかに

$$\sup_{\xi\in R^N}|\hat{f}(\xi)|\leqq\|f\|_1. \tag{29. 4}$$

定理 29. 1. $f\in\mathfrak{S}$ ならば, i) $\hat{f}\in\mathfrak{S}$; ii) 任意の $p=(p_1, \cdots, p_N)$ (§24 参照) に対して

$$D^p\hat{f}(\xi)=\int e^{-2\pi i\xi\cdot x}\prod_{\nu=1}^{N}(-2\pi ix_\nu)^{p_\nu}f(x)dx, \tag{29. 5}$$

$$\prod_{\nu=1}^{N}(2\pi i\xi_\nu)^{p_\nu}\hat{f}(\xi)=\int e^{-2\pi i\xi\cdot x}D^p f(x)dx. \tag{29. 6}$$

証明. はじめに ii) を証明する. (29. 3) の右辺の被積分函数を ξ_1 で偏微分したものは $|-2\pi ix_1e^{-2\pi i\xi\cdot x}f(x)|\leqq|2\pi x_1f(x)|\in L^1$ ($\because f\in\mathfrak{S}$) を満たすから, 定理 14. 2 により

$$\frac{\partial\hat{f}(\xi)}{\partial\xi_1}=\int e^{-2\pi i\xi\cdot x}(-2\pi ix_1)f(x)dx.$$

この操作を ξ_1 について p_1 回, ξ_2 について p_2 回, …, ξ_N について p_N 回くりかえせば (29. 5) が得られる.

次に, $f\in\mathfrak{S}$ ならば $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\in\mathfrak{S}$ (§24 問3) だから, (29. 3) の f を $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ でおきかえると

$$\int e^{-2\pi i\xi\cdot x}\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}dx=\int_{R^{N-1}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi i\xi\cdot x}\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}dx_1\right\}dx_2\cdots dx_N \tag{29. 7}$$

となる. この右辺の { } の中は, 部分積分で

$$\Big[e^{-2\pi i\xi\cdot x}f(x)\Big]_{x_1=-\infty}^{x_1=\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi i\xi\cdot x}(-2\pi i\xi_1)f(x)dx_1$$

となるが, $f\in\mathfrak{S}$ なることによって, 上の式の第一項は 0 となる. 従って (29. 7) の右辺は

$$\int_{R^{N-1}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi i\xi\cdot x}(2\pi i\xi_1)f(x)\,dx_1\right\}dx_2\cdots dx_N$$

$$=2\pi i\xi_1\int_{R^N}e^{-2\pi i\xi\cdot x}f(x)dx=2\pi i\xi_1\hat{f}(\xi)$$

となるから, (29. 7) から

$$2\pi i\xi_1\hat{f}(\xi)=\int e^{-2\pi i\xi\cdot x}\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}dx.$$

この操作を x_1 について p_1 回, x_2 について p_2 回, …, x_N について p_N 回くりかえせば (29. 6) が得られる. (29. 6) から, $(\xi_1, \cdots, \xi_N)$ の任意の多項式 $P(\xi)=P(\xi_1, \cdots, \xi_N)$ に対して

$$P(2\pi i\xi)\hat{f}(\xi)=\int e^{-2\pi i\xi\cdot x}P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x)dx, \tag{29. 6'}$$

ここに $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ は $P(\xi_1, \cdots, \xi_N)$ において $\xi_1, \cdots, \xi_N$ を形式的にそれぞれ $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots,$ $\frac{\partial}{\partial x_N}$ でおきかえた偏微分作用素を表わす.

以上のことを使って i) を証明しよう. 任意に与えられた D^p に対して

$$g(x)=\prod_{\nu=1}^{N}(-2\pi i x_\nu)^{p_\nu}f(x)$$

とおくと, (29. 5) により $\hat{g}=D^p\hat{f}$ である. また任意の自然数 n に対して, (29. 6′) において f, $P(\xi)$ をそれぞれ g, $[\xi_1{}^2+\cdots+\xi_N{}^2]^n$ でおきかえてから,

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^2\right]^n g(x)=h(x)$$

とおくと

$$[(2\pi i\xi_1)^2+\cdots+(2\pi i\xi_N)^2]^n D^p\hat{f}(\xi)=\int e^{-2\pi i\xi\cdot x}h(x)dx;$$

ここで $h\in\mathfrak{S}\subset L^1$ だから, 両辺の絶対値をとって (29. 4) を使うと

$$|\xi|^{2n}|D^p\hat{f}(\xi)|=(\xi_1{}^2+\cdots+\xi_N{}^2)^n|D^p\hat{f}(\xi)|\leqq\|h\|_1<\infty.$$

従って, $|\xi|\to\infty$ のとき $|\xi|^n|D^p\hat{f}(\xi)|\leqq|\xi|^{-n}\|h\|_1\to 0$ となり, $\hat{f}\in\mathfrak{S}$ である.

定理 29. 2 (**Riemann-Lebesgue の定理**). 任意の $f\in L^1$ に対して $\hat{f}\in L_\infty$, $\|\hat{f}\|_\infty\leqq\|f\|_1$ である.

証明. $f\in L^1$ ならば定理 24. 6 により

$$f_n\in\mathfrak{S},\ \|f_n-f\|_1\to 0\ (n\to\infty)$$

なる $\{f_n\}$ が存在する. このとき (29. 4) により, 任意の $\xi\in R^N$ に対して

$$|\hat{f}_n(\xi)-\hat{f}(\xi)|\leqq\|f_n-f\|_1\to 0\ (n\to\infty),$$

すなわち $\hat{f}_n(\xi)$ は $\hat{f}(\xi)$ に R^N で一様に収束する. ところが定理 29. 1 と定理 24. 6 により $\hat{f}_n\in\mathfrak{S}\subset L_\infty$ だから, $\hat{f}\in L_\infty$ となる. $\|\hat{f}\|_\infty\leqq\|f\|_1$ なることは (29. 4) により明らかである.

定理 29. 3. $f, g\in L^1$ ならば $(f\otimes g)^\wedge(\xi)=\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$.

これは §15 の問5である. (証明は巻末の解答を参照.)

函数 $\varphi(\xi)\in L^1$ に対して

$$(\mathfrak{F}^*\varphi)(x)=\int e^{2\pi i x\cdot\xi}\varphi(\xi)d\xi \tag{29. 8}$$

で定義される作用素 $\mathfrak{F}^*$ を, ($\mathfrak{F}$ の)**共役 Fourier 変換**または **Fourier 逆変換**という.

例. $u_t(x)=(2\pi t)^{-N/2}e^{-|x|^2/2t}$ $(t>0)$ に対して

(29. 9) $$(\mathfrak{F}u_t)(\xi)\equiv\hat{u}_t(\xi)=e^{-2\pi^2 t|\xi|^2},$$

(29. 10) $$(\mathfrak{F}^*\hat{u}_t)(x)=u_t(x).$$

証明. Fourier 変換の定義 (29. 3) により

$$\hat{u}_t(\xi)=(2\pi t)^{-N/2}\prod_{\nu=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi i\xi_\nu x_\nu-(x_\nu)^2/2t}dx_\nu$$

であり，上の各 x_ν についての積分は §14 問4の積分の形 (λ, t がそれぞれ $-2\pi\xi_\nu$, $1/2t$ になったもの) であるから，積分を計算すれば $\sqrt{2\pi t}\,e^{-2\pi^2 t(\xi_\nu)^2}$ となる．よって (29. 9) が得られる．(29. 10) も同様にして証明できる．

上の例で $\mathfrak{F}^*\mathfrak{F}u_t=u_t$ となることがわかるが，このことは上の例の函数 u_t ばかりではない．すなわち

定理 29. 4. f と $\hat{f}$ とがともに L^1 に属するならば (従って特に $f\in\mathfrak{S}$ ならば)

$$\mathfrak{F}^*\mathfrak{F}f=\mathfrak{F}\,\mathfrak{F}^*f=f.$$

証明. $u_t(x)$ を上の例に与えた函数とすると，(29. 10) により

$$u_t\otimes f(x)=\int f(x-y)u_t(y)dy=\int f(x-y)dy\int e^{2\pi iy\cdot\xi}\hat{u}_t(\xi)d\xi$$

$$\overset{*)}{=}\int e^{2\pi ix\cdot\xi}\,\hat{u}_t(\xi)d\xi\int e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}f(x-y)dy$$

$$=\int e^{2\pi ix\cdot\xi}\,\hat{u}_t(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi.$$

ここで $t\to0$ とすると左辺$\to f(x)$ (§13 問2参照) であり，右辺において

$$|e^{2\pi ix\cdot\xi}\,\hat{u}_t(\xi)\hat{f}(\xi)|\leqq|\hat{f}(\xi)|\in L^1,\ \ \hat{u}_t(\xi)\to1\ \ (t\to0)$$

だから，Lebesgue の収束定理 13. 6′ により右辺は $\int e^{2\pi ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)d\xi$ に近づく．だから $f=\mathfrak{F}^*\hat{f}=\mathfrak{F}^*\mathfrak{F}f$ が得られた．$e^{2\pi ix\cdot\xi}$ を $e^{-2\pi ix\cdot\xi}$ でおきかえれば，同様にして $f=\mathfrak{F}\,\mathfrak{F}^*f$ が得られる．

系 1. $\{\mathfrak{F}f;\ f\in\mathfrak{S}\}=\mathfrak{S}$, $\{\mathfrak{F}^*\varphi;\ \varphi\in\mathfrak{S}\}=\mathfrak{S}$.

証明. $\{\mathfrak{F}f;\ f\in\mathfrak{S}\}\subset\mathfrak{S}$ なることは定理 29. 1 により明らか．また任意の $\varphi\in\mathfrak{S}$ に対して，上の定理 29. 4 により $\varphi=\mathfrak{F}\,\mathfrak{F}^*\varphi$, $\mathfrak{F}^*\varphi\in\mathfrak{S}$ となるから，$\mathfrak{S}\subset\{\mathfrak{F}f;\ f\in\mathfrak{S}\}$ である．よって $\{\mathfrak{F}f;\ f\in\mathfrak{S}\}=\mathfrak{S}$. 同様にして $\{\mathfrak{F}^*f;\ f\in\mathfrak{S}\}=\mathfrak{S}$ も証明される．

---

*) $e^{2\pi iy\cdot\xi}=e^{2\pi ix\cdot\xi}e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}$ としてから Fubini の定理を使った

$\left(\int|f(x-y)|dy\int|\hat{u}_t(\xi)|d\xi<\infty\ \text{により}\right)$.

系 2. $\{\hat{f};\ f\in L^1\}$ は L_∞ の中でノルム $\|\cdot\|_\infty$ に関して稠密である.

証明. 定理 29. 2 により $\{\hat{f};\ f\in L^1\}\subset L_\infty$. 一方上の系 1 と定理 24. 6 によって $\{\hat{f};\ f\in\mathfrak{S}\}$ が L_∞ でノルム $\|\cdot\|_\infty$ に関して稠密であり, $\mathfrak{S}\subset L^1$ だから, $\{\hat{f};\ f\in L^1\}$ は L_∞ でノルム $\|\cdot\|_\infty$ に関して稠密である.

定理 29. 5. 任意の $f\in L^1$, $g\in\mathfrak{S}$ に対して

$$\int f(x)\overline{g(x)}dx=\int \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi.$$

証明. $f\in L^1$, $g\in\mathfrak{S}$ ならば $\hat{f}\in L_\infty$, $\hat{g}\in\mathfrak{S}$ (定理 29. 1 および 29. 2) だから, 上の式の両辺の積分は存在し, 定理 29. 4 と Fubini の定理により

$$\text{左辺}=\int f(x)\overline{\left\{\int e^{2\pi i x\cdot\xi}\hat{g}(\xi)d\xi\right\}}dx=\int\left\{\int e^{-2\pi i x\cdot\xi}f(x)dx\right\}\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi$$

$$=\int\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi=\text{右辺}.$$

系. $f\in L^1$, $\hat{f}(\xi)\equiv 0$ ならば $f(x)=0$ (a. e.) である.

証明. 任意の $g\in\mathfrak{S}$ に対して, 上の定理を f と $\bar{g}(\in\mathfrak{S})$ とに適用すれば $\int f(x)g(x)dx=0$ となるから, $f(x)=0$ (a. e.) である.*)(証明終)

定理 29. 4 とその系 1 により, $\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{F}^*$ はともに $\mathfrak{S}$ を $\mathfrak{S}$ 全体に写す線型作用素 (§25) であって, 互に他の逆写像になっている. また $\mathfrak{S}$ を Hilbert 空間 L^2 の部分空間と考えると, 定理 29. 5 により, 任意の f, $g\in\mathfrak{S}$ に対して内積の記号で

$$(f,\ g)=(\hat{f},\ \hat{g})$$

が成立するから, $\mathfrak{F}$ は (従って $\mathfrak{F}^*$ も) 内積を変えない写像である. 特に $g=f$ とおけば

$$\|\mathfrak{F}f\|_2{}^2=\|f\|_2{}^2,\quad \|\mathfrak{F}^*f\|_2{}^2=\|f\|_2{}^2 \tag{29. 11}$$

がすべての $f\in\mathfrak{S}$ に対して成立する. すなわち $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}^*$ は L^2 の中で稠密な線型部分空間 $\mathfrak{S}$ で定義されていて, L^2 の値をとる有界線型作用素で, $\|\mathfrak{F}\|=\|\mathfrak{F}^*\|=1$ である, だから定理 25. 2 により, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}^*$ は L^2 全体で定義されて L^2 の値をとる有界線型作用素に拡張される. 拡張された作用素も, 同じ記号 $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}^*$ で表わすことにする. このとき, 任意の $f\in\mathfrak{S}$ に対して (29. 11) が成立することと, ノルムの連続性 (定理 27. 1) とにより, 任意の $f\in L^2$ に対して (29. 11) が成立し, 従って $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}^*$ は一対一の写像である. また任意の f, $g\in L^2$ に対して

$$(\mathfrak{F}f,\ \mathfrak{F}g)=(f,\ g),\qquad (\mathfrak{F}^*f,\ \mathfrak{F}^*g)=(f,\ g). \tag{29. 12}$$

---

*) §24 問 4 参照.

なぜならば，

$$(f,\ g)=\frac{1}{4}(\|f+g\|_2{}^2-\|f-g\|_2{}^2+i\|f+ig\|_2{}^2-i\|f-ig\|_2{}^2)$$

（右辺の各ノルムを内積の形に書いて展開すれば左辺に等しくなる）が成立し，$(\mathfrak{F}f,\ \mathfrak{F}g)$，$(\mathfrak{F}^*f,\ \mathfrak{F}^*g)$ についても同様な式が成立するから，(29. 11) から (29. 12) が出る．さらに $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}^*$ は L^2 を L^2 全体に写す．なぜならば，任意の $\varphi\in L^2$ に対して $\|\varphi_n-\varphi\|_2\to 0$ $(n\to\infty)$ なる $\{\varphi_n\}\subset\mathfrak{S}$ が存在し，定理 29. 4 により $\mathfrak{F}\mathfrak{F}^*\varphi_n=\varphi_n$ であるから，$f=\mathfrak{F}^*\varphi$ とおくと（$\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}^*$ がノルムを変えないことにより）

$$\|\varphi-\mathfrak{F}f\|_2\leqq\|\varphi-\varphi_n\|_2+\|\varphi_n-\mathfrak{F}f\|_2=\|\varphi-\varphi_n\|_2+\|\mathfrak{F}\mathfrak{F}^*\varphi_n-\mathfrak{F}\mathfrak{F}^*\varphi\|_2$$
$$=2\|\varphi-\varphi_n\|_2\to 0 \qquad (n\to\infty).$$

だから $\varphi=\mathfrak{F}f$ となり，$\mathfrak{F}$ が L^2 を L^2 全体に写すことがわかる．$\mathfrak{F}^*$ についても同様に証明される．また，上と同じ論法で，$\mathfrak{S}$ において $\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{F}^*$ が互いに逆写像であることから，L^2 全体に拡張された $\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{F}^*$ も互いに逆写像になっていることがわかる．この $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}^*$ をそれぞれ L^2 における **Fourier 変換**，**共役 Fourier 変換**（または **Fourier 逆変換**）という．

L^2 における上記の $\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{F}^*$ が，前に形式的に書いた (29. 2″) と (29. 1″) とを拡張した形で，具体的に書けることを示そう．そのための準備として，

補助定理 1. $f\in L^1\cap L^2$ ならば $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_1=0$, $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_2=0$ が同時に成立するような $\{f_n\}\subset\mathfrak{S}$ が存在する．

証明. 定理 24. 2 の証明はすべての $p\geqq 1$ に対して共通に適用されるから，$f\in L^1\cap L^2$ ならば，各自然数 n に対して，

$$\|g_n-f\|_1<1/n,\ \ \|g_n-f\|_2<1/n$$

が同時に成立するような $g_n\in L$ が存在する．次にこの各 g_n に対して，§24 の最後の補助定理 2 および補助定理 1 により

$$\|f_n-g_n\|_1<1/n,\ \ \|f_n-g_n\|_2<1/n$$

が同時に成立するような $f_n\in\mathfrak{S}$ が存在する．こうして得られた $\{f_n\}$ は

$$\|f_n-f\|_1\to 0,\ \ \|f_n-f\|_2\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

を満たす．

補助定理 2. $f\in L^1\cap L^2$ ならば $\mathfrak{F}f(\xi)=\int e^{-2\pi i\xi\cdot x}f(x)dx$ (a. e).

（これは自明ではない；左辺の $\mathfrak{F}f$ は，最初に L^1 で定義された $\mathfrak{F}$ を一応 $\mathfrak{S}$ の上だけで考えて，それを L^2 の中で定理 25. 2 を使って拡張したものであるから，任意の $f\in L^1$

$\cap L^2$ に対してははじめの $\mathfrak{F}$ と同じ式で与えられるということは，証明なしにはいえないことである.）

証明. 函数 $f\in L^1\cap L^2$ に対して，$\hat{f}$ を (29. 3) で定義された函数とし，L^2 で定義された $\mathfrak{F}$ に対して $\mathfrak{F}f=\hat{f}$ を証明すればよい. 補助定理 1 により

$$\|f_n-f\|_1\to 0,\ \|f_n-f\|_2\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

なる $\{f_n\}\subset\mathfrak{S}$ が存在し，定理 29. 2 と (29. 12) により

$$\|\hat{f}_n-\hat{f}\|_\infty\to 0,\ \|\mathfrak{F}f_n-\mathfrak{F}f\|_2\to 0 \qquad (n\to\infty).$$

ところが $f_n\in\mathfrak{S}$ に対しては $\hat{f}_n=\mathfrak{F}f_n$ であるから，上のことから $\hat{f}(\xi)=(\mathfrak{F}f)(\xi)$ (a. e.) すなわち L^2 において $\hat{f}=\mathfrak{F}f$ である.（証明終）

さて，任意の $f\in L^2$ に対して

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x) & (|x|<n \text{ のとき}) \\ 0 & (|x|\geqq n \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおくと，$f_n\in L^1\cap L^2$，$\|f_n-f\|_2\to 0$ $(n\to\infty)$ だから，補助定理 2 と (29. 12) により

$$(\mathfrak{F}f_n)(\xi)=\int_{|x|<n} e^{-2\pi i\xi\cdot x}f(x)dx,\ \|\mathfrak{F}f_n-\mathfrak{F}f\|_2\to 0 \qquad (n\to\infty).$$

よって，すべての $f\in L^2$ に対して（$f\in L^1$ でなくても）$\mathfrak{F}f$ のことを $\hat{f}$ と書くことにすると

$$\hat{f}(\xi)=\underset{n\to\infty}{\text{l. i. m.}}\int_{|x|<n} e^{-2\pi i\xi\cdot x}f(x)dx.\ ^{*)}$$

このとき $\hat{f}\in L^2$ だから，今までの $\mathfrak{F}$ を $\mathfrak{F}^*$ でおきかえて，同様の論法により

$$f(x)=(\mathfrak{F}^*\hat{f})(x)=\underset{n\to\infty}{\text{l. i. m.}}\int_{|\xi|<n} e^{2\pi i x\cdot\xi}\hat{f}(\xi)d\xi.$$

以上の結果をまとめて，次の定理を得る.

定理 29. 6. 任意の $f\in L^2$ に対して，Fourier 変換

(29. 13) $$\hat{f}(\xi)=\underset{n\to\infty}{\text{l. i. m.}}\int_{|x|<n} e^{-2\pi i\xi\cdot x}f(x)dx\in L^2$$

が存在して

(29. 14) $$\|\hat{f}\|_2=\|f\|_2.$$

このとき $\hat{f}=\mathfrak{F}f$ とおくと，写像 $\mathfrak{F}$ は L^2 を L^2 全体に一対一に写し，その逆写像は

(29. 15) $$f(x)=\underset{n\to\infty}{\text{l. i. m.}}\int_{|\xi|<n} e^{2\pi i x\cdot\xi}\hat{f}(\xi)d\xi$$

---

*) l. i. m. は平均収束の極限を意味する（§22 参照）.

で与えられる．特に $f\in L^1\cap L^2$ または $\hat{f}\in L^1\cap L^2$ の場合には，それぞれ (29. 13) または (29. 15) の右辺において，積分範囲を R^N 全体にすることができて，l. i. m. とする必要はない．

これを **Plancherel**（プランシュレル）**の定理**という．この § の最初に形式的に書いた (29. 2″)，(29. 1″) がそれぞれ (29. 13)，(29. 15) により厳密に定式化されたわけである．

注意 1. (29. 13) において積分範囲 $\{|x|<n\}$ のかわりに

$$\Gamma_c=\{x;\ |x_\nu|<c\ \ (\nu=1,\ \cdots,\ N)\}$$

をとって

$$\hat{f}(\xi)=\underset{c\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\int_{\Gamma_c}e^{-2\pi i\xi\cdot x}f(x)dx$$

としてもよい．一般に $\{\Gamma_c\}$ としては，極限集合が R^N であるような Borel 集合列で（パラメター c は自然数でも，実数のように連続的に変化しても）よいわけであって，このことは上の定理の前の説明を見れば容易にわかる．

定理 29. 7. $f,\ g\in L^2$ の Fourier 変換をそれぞれ $\hat{f},\ \hat{g}$ とすると

$$\int f(x)\overline{g(x)}dx=\int\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi\qquad(\textbf{Parseval の等式}),\tag{29. 16}$$

$$\int f(x)g(x)dx=\int\hat{f}(\xi)\hat{g}(-\xi)d\xi,\tag{29. 17}$$

$$\int f(x-y)g(y)dy=\int\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi,\tag{29. 18}$$

$$\int f(x)g(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}dx=\int\hat{f}(\xi-\eta)\hat{g}(\eta)d\eta.\tag{29. 19}$$

証明. (29. 16) は (29. 12) の書きかえである．(29. 16) において $g(x)$ を $\overline{g(x)}$ にすると (29. 17) を得る．(29. 17) において $f(x)$ を $f(x-y)$（y の函数として）でおきかえると

$$\int f(x-y)g(y)dy=\int\hat{f}(-\xi)e^{-2\pi ix\cdot\xi}\hat{g}(-\xi)d\xi$$

$$=\int\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi$$

となって (29. 18) が得られる．また (29. 17) において $f(x)$ を $f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}$ でおきかえれば，同様にして (29. 19) が得られる．（証明終）

$\mathfrak{F}$ を n 回作用させることを $\mathfrak{F}^n$ と書くことにすると，次の定理が成立することは $\mathfrak{F}$ の

定義から容易にわかる：

定理 29. 8. 任意の $f\in L^2$ に対して $\mathfrak{F}^2 f(x)=f(-x)$, $\mathfrak{F}^4 f=f$.

注意 2. Fourier 変換，共役 Fourier 変換の定義 (29. 3), (29. 8) をそれぞれ

$$(\mathfrak{F}f)(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int e^{-i\xi\cdot x}f(x)dx,\quad (\mathfrak{F}^*\varphi)(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int e^{ix\cdot\xi}\varphi(\xi)d\xi$$

とすることもある．これらは (29. 3), (29. 8) において x, ξ をそれぞれ $x/\sqrt{2\pi}$, $\xi/\sqrt{2\pi}$ でおきかえたものであるから，この場合は他の式も同様に定数倍だけ変えればよい．例えば定理 29. 2, 定理 29. 3 の中の式はそれぞれ

$$\|\hat{f}\|_\infty\leqq(2\pi)^{-N/2}\|f\|_1,\quad (f\otimes g)^\wedge(\xi)=(2\pi)^{N/2}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$$

となる．また定理 29. 6 の (29. 13), (29. 15) の右辺には $(2\pi)^{-N/2}$ を掛ければよいが，定理 29. 7 の各式は（両辺に同じ定数を掛けることになるから）そのままでよい．

問 1. この§の例で与えた函数 $u_t(x)$ に対して $u_t\otimes u_s=u_{t+s}$ が成立することを，Fourier 変換を使って証明せよ．(このことは直接計算によって証明することもできるが，Fourier 変換を使うと非常に簡単である．)

問 2. $u_t(x)$ を前問のとおりとするとき，

i) $f(x)$ が R^N の上で有界で，$x=0$ において連続ならば

$$\lim_{t\downarrow 0}\int u_t(x)f(x)dx=f(0).$$

ii) $\varphi\in L^1$ ならば $\displaystyle\lim_{t\downarrow 0}\int\varphi(\xi)\hat{u}_t(\xi)d\xi=\int\varphi(\xi)d\xi.$

最後に，Plancherel の定理と前§の Fourier 級数の応用として，Poisson（ポアッソン）の和公式と呼ばれる式を証明しておく．

定理 29. 9. $R^1=(-\infty,\infty)$ の上の連続函数 $f(x)$ があって，$\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(x+m)$ が $[0, 1]$ で絶対かつ一様に収束し,*) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)$ が絶対収束すれば

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\quad\text{(Poisson の和公式).}\tag{29. 20}$$

証明. 仮定により

$$F(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(x+m),\quad G(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|f(x+m)|\tag{29. 21}$$

がともに存在して $[0, 1]$ で連続である．従って

*) このとき，次の証明の最初に述べるように $f\in L^1$ となるから，$\hat{f}$ を考えることができる．

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^1|f(x+m)|dx=\int_0^1 G(x)dx<\infty,$$

すなわち $f\in L^1(-\infty,\ \infty)$ となり, $\hat{f}(\xi)$ が存在する. また $n,\ m$ が整数 ($\gtreqless 0$) ならば $e^{-2\pi inm}=1$ だから

$$\int_0^1 F(x)e^{-2\pi inx}dx=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^1 f(x+m)e^{-2\pi inx}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-2\pi inx}dx=\hat{f}(n).$$

$\{e^{2\pi inx};\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}$ は $L^2(0,\ 1)$ において完全正規直交系をなす*) から, 上の式により $F(x)$ は $L^2(0,\ 1)$ の点として, 従って a.e. $x\in[0,\ 1]$ に対して

(29. 22) $$F(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{2\pi inx}$$

と表わされる. ところが $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)$ が絶対収束する (定理の仮定) から, 上の式の右辺は x について一様収束し, 従って x の連続函数である. 一方 $F(x)$ も x の連続函数だから, (29. 22) はすべての $x\in[0,\ 1]$ に対して成立する. よって特に $x=0$ とおけば, (29. 21) によって (29. 20) が得られる. (証明終)

この定理の仮定はもう少しゆるめられるが, 応用上は大抵は上の形でよい. 簡単な応用例として,

問 3. 任意の $t>0$ に対して

(29. 23) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2t}=\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2/t}.$$

例えば, 与えられた $t>0$ に対して (29. 23) の左辺 (または右辺) の値を実際に計算する場合に, t が大きいときは左辺の級数の収束が速いから左辺の形が便利であり, t が 0 に近いときは右辺の級数の収束が速いから右辺の形が便利である.

問 4. $f(x)$ が R^1 で無限回連続微分可能で有界な台をもてば, 任意の複素数 $\zeta=\xi+i\eta$ に対して

$$\hat{f}(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi i\zeta x}f(x)dx$$

が存在し, 任意の η に対して

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi ix(\xi+i\eta)}\hat{f}(\xi+i\eta)d\xi$$

が成立する.

問 5. $f,\ g\in L^1\frown L^2$ (一般に R^N 上の) なるとき $h=f\otimes g$ とおくと, h も $\hat{h}$ も

---

*) 定理 28. 5 と本質的に同じである.

$L^1 \cap L^2$ に属する.

問 6. $f(x)$ は R^N の上の実数値函数で $f \in L^1$ とする. このとき, i) $f(x)$ が偶函数 ($f(-x)=f(x)$) ならば $\hat{f}(\xi)$ は実数値をとる; ii) $f(x)$ が奇函数 ($f(-x)=-f(x)$) ならば $\hat{f}(\xi)$ は純虚数の値をとる.

§30. 正の定符号函数

この§においては, 定理 30. 7 の記述を除き, x の添字 $1, 2, \cdots, p, q, \cdots, n$ は点の番号を表わすものであって, 一点 x の座標ではない. (すなわち x_p は R^N の中の一つの点を表わし, 点 $x\ (\in R^N)$ の第 p 座標ではない.) 定理 30. 7 においては, $x_1, \cdots, x_\nu, \cdots, x_N$ などは一点 $x\ (\in R^N)$ の座標を表わすものとする. また前§と同様に, R^N の上の積分においては $\int$ の下の R^N を省略する; $\iint$ と書いた場合は R^{2N} の上での積分を表わすものとする.

R^N の上の函数 $\varphi(x)$ が**正の定符号函数**であるとは, $\varphi(x)$ が $x=0$ (R^N の原点) で連続であって, 任意の有限個の点 $x_1, \cdots, x_n \in R^N$ と任意の複素数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ に対して

$$\sum_{p,q=1}^{n} \alpha_p \bar{\alpha}_q \varphi(x_p - x_q) \geqq 0 \tag{30. 1}$$

が成立することである. 正の定符号函数のことを**正型函数**ともいう.*)

定理 30. 1. $\varphi(x)$ が正の定符号函数ならば

$$\varphi(0) \geqq 0; \tag{30. 2}$$

任意の $x \in R^N$ に対して

$$\varphi(-x) = \overline{\varphi(x)}, \tag{30. 3}$$

$$|\varphi(x)| \leqq \varphi(0); \tag{30. 4}$$

任意の $x, y \in R^N$ に対して

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|^2 \leqq 2\varphi(0)\{\varphi(0) - \Re\varphi(x-y)\}, \tag{30. 5}$$

従って $\varphi(x)$ は R^N で一様連続である.

証明. (30. 1) において $n=1$, $x_1=0$, $\alpha_1=1$ とおくと (30. 2) を得る. 次に $n=2$, $x_1=x$, $x_2=0$, $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=1$ とおくと

$$|\alpha|^2\varphi(0) + \alpha\varphi(x) + \bar{\alpha}\varphi(-x) + \varphi(0) \geqq 0 \tag{30. 6}$$

となるから, ここでさらに $\alpha=1$, および $\alpha=i$ とおいて (30. 2) を使うとそれぞれ

---

*) 正値函数と呼ぶ人もあるが, この名称は各点 x で $\varphi(x) \geqq 0$ なる函数と誤解されやすいから, 本書では使わない.

$$\varphi(x)+\varphi(-x)=\text{実数},\ \varphi(x)-\varphi(-x)=\text{純虚数}$$

となる．この二つの式から (30. 3) が得られる．また (30. 6) において $\alpha=-e^{i\theta}$，ただし $\theta=-\arg\varphi(x)$，とおくと $\alpha\varphi(x)=-|\varphi(x)|$，従って (30. 3) により $\bar{\alpha}\varphi(-x)=\overline{\alpha\varphi(x)}=-|\varphi(x)|$ であるから，(30. 6) は

$$\varphi(0)-|\varphi(x)|-|\varphi(x)|+\varphi(0)\geqq 0$$

となり，これから (30. 4) が得られる．また (30. 1) において $n=3$ として

$$x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=0$$

とし，λ を任意の実数，$\theta=-\arg[\varphi(x)-\varphi(y)]$ として

$$\alpha_1=\lambda e^{i\theta},\ \alpha_2=-\lambda e^{i\theta},\ \alpha_3=1$$

とする．これらを (30. 1) に代入して λ について整頓し，

$$\varphi(-x)=\overline{\varphi(x)},\ \varphi(y-x)=\overline{\varphi(x-y)}\qquad ((30.\ 3)\text{ により})$$

などを使うと

$$2\{\varphi(0)-\Re\varphi(x-y)\}\lambda^2+2\Re[e^{i\theta}\{\varphi(x)-\varphi(y)\}]\lambda+\varphi(0)\geqq 0,$$

従って θ の定め方により

$$2\{\varphi(0)-\Re\varphi(x-y)\}\lambda^2+2|\varphi(x)-\varphi(y)|\lambda+\varphi(0)\geqq 0.$$

ここで λ は任意の実数であるから，左辺を λ の二次式と考えた時の判別式は正の値ではない．すなわち

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|^2-2\varphi(0)\{\varphi(0)-\Re\varphi(x-y)\}\leqq 0;$$

これは (30. 5) を意味する．従って，$\varphi(x)$ の $x=0$ における連続性から，R^N における一様連続性が出る．

定理 30. 2. $\varphi(x)$ が正の定符号函数ならば，任意の $f\in L^1$ に対して

(30. 7) $$\iint\varphi(x-y)f(x)\overline{f(y)}\,dx\,dy\geqq 0.$$

逆に，$\varphi(x)$ が連続であって，任意の $f\in L$ に対して (30. 7) が成立すれば，$\varphi(x)$ は正の定符号函数である．

証明. $f\in L$ の場合．$E\supset\mathrm{Car}(f)$ なる有界な区間 E をとると，(30. 7) の積分は R^{2N} の中の有界な区間 $E\times E$ における連続函数の積分であるから，その値は Riemann 積分で定義されるものに等しい．すなわち，E を $E=E_1+\cdots+E_n$ と有限個の小区間に分割して，各 E_p の中から一点 x_p をとって作った Riemann 式近似和

$$\sum_{p,q=1}^{n}\varphi(x_p-x_q)f(x_p)\overline{f(x_q)}\mu(E_p)\mu(E_q)\qquad(\mu\text{ は Lebesgue 測度})$$

において，$\max_p \mathrm{diam}(E_p)\to 0$ ($\mathrm{diam}(E_p)$ は E_p の‘直径’) としたときの極限値が，

その積分の値である．ところが，$\varphi(x)$ が正の定符号函数だから，上の Riemann 式近似和の値は $\geqq 0$ となる ((30. 1) において $\alpha_p=f(x_p)\mu(E_p)$)．だから，はじめの積分の値が $\geqq 0$ となる．

一般の $f\in L^1$ の場合は，定理 24. 2 により $\|f_n-f\|_1\to 0$ $(n\to\infty)$ なる $\{f_n\}\subset L$ が存在する．だから (30. 4) により

$$\left|\int\int\varphi(x-y)f_n(x)\overline{f_n(y)}dxdy-\int\int\varphi(x-y)f(x)\overline{f(y)}dxdy\right|$$
$$\leqq\int\int\varphi(0)|f_n(x)\overline{f_n(y)}-f(x)\overline{f(y)}|dxdy$$
$$\leqq\varphi(0)\left\{\int|f_n(x)|dx\int|f_n(y)-f(y)|dy+\int|f_n(x)-f(x)|dx\int|f(y)|dy\right\}$$
$$=\varphi(0)\{\|f_n\|_1\|f_n-f\|_1+\|f_n-f\|_1\|f\|_1\}\to 0\qquad(n\to\infty).$$

ところが，上に証明したように $f_n\in L$ に対しては (30. 7) が成立するから，$f\in L^1$ に対しても (30. 7) が成立する．

逆の証明は，任意の $x_1, \cdots, x_n\in R^N$ と任意の複素数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ に対して

$$\int\int\varphi(x-y)\left\{\sum_p\alpha_p h_\delta(x-x_p)\right\}\overline{\left\{\sum_q\alpha_q h_\delta(y-x_q)\right\}}dxdy$$

(h_δ は §24 例 2 で与えた函数) を考えて $\delta\to 0$ の極限をとることにより容易にできるから，読者の演習問題とする．

問 1. 上の定理の後半を証明せよ．

定理 30. 3. μ が $(R^N, \mathfrak{B}_N)$ の上で定義された測度で $\mu(R^N)<\infty$ なるものとすると，$x\in R^N$ の函数

(30. 8)
$$\varphi(x)=\int e^{2\pi i x\cdot\xi}d\mu(\xi)$$

は正の定符号函数で，$\varphi(0)=\mu(R^N)$ である．

この定理の証明も，次のヒントのようにすれば容易であるから，読者諸氏において試みられたい．(ヒント．(30. 1) を示すには

$$\sum\alpha_p\bar{\alpha}_q e^{2\pi i\xi\cdot(x_p-x_q)}=(\sum\alpha_p e^{2\pi i\xi\cdot x_p})(\overline{\sum\alpha_q e^{2\pi i\xi\cdot x_q}})$$

を使う．$\varphi(x)$ の $x=0$ における連続性は Lebesgue の収束定理 13. 6′ による．$\varphi(0)=\mu(R^N)$ は明らかである．)

問 2. 定理 30. 3 を証明せよ．

定理 30. 4. $(R^N, \mathfrak{B}_N)$ の上の $\mu_n(R^N)=1$ なる測度 μ_n $(n=1, 2, \cdots)$ があって，

(30. 9)
$$\varphi_n(x)=\int e^{2\pi i x\cdot\xi}d\mu_n(\xi)$$

なる函数の列 $\{\varphi_n(x)\}$ が各点 $x\in R^N$ で或る函数 $\varphi(x)$ に収束し，その収束が $x=0$ の或る近傍*) で一様であるとすると，$(R^N,\ \mathfrak{B}_N)$ の上の $\mu(R^N)=1$ なる測度 μ で

(30. 10)
$$\varphi(x)=\int e^{2\pi i x\cdot\xi}d\mu(\xi)$$

となるものが存在する.

証明. 前定理により各 $\varphi_n(x)$ は正の定符号函数であるから，任意の $x_1,\cdots,x_m\in R^N$ と任意の複素数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ に対して

$$\sum_{p,q}\alpha_p\bar{\alpha}_q\varphi_n(x_p-x_q)\geqq 0.$$

各点 $x\in R^N$ で $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$ だから，上の不等式から

$$\sum_{p,q}\alpha_p\bar{\alpha}_q\varphi(x_p-x_q)\geqq 0$$

を得る. また各 $\varphi_n(x)$ は連続で，$x=0$ の近傍で $\varphi_n(x)$ が $\varphi(x)$ に一様収束するから，$\varphi(x)$ は $x=0$ で連続である. だから $\varphi(x)$ は正の定符号函数であり，定理 30. 1 により R^N で有界，一様連続で $\varphi(0)=1$ である. 次に，任意の $f\in\mathfrak{S}$ に対して

(30. 11)
$$T(f)=\int\varphi(x)\hat{f}(x)dx$$

と定義する；$\hat{f}\in\mathfrak{S}\subset L^1$ だから上の式の右辺は意味をもち，T は $\mathfrak{S}$ の上の線型汎函数 (§25) である. また $|\varphi_n(x)\hat{f}(x)|\leqq\varphi_n(0)|\hat{f}(x)|=|\hat{f}(x)|$ だから Lebesgue の収束定理により

(30. 12)
$$T(f)=\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n(x)\hat{f}(x)dx$$

となる. ところが (30. 9) と Fubini の定理および定理 29. 4 により

$$\int\varphi_n(x)\hat{f}(x)dx=\int\hat{f}(x)dx\int e^{2\pi i x\cdot\xi}d\mu_n(\xi)$$

$$=\int d\mu_n(\xi)\int e^{2\pi i\xi\cdot x}\hat{f}(x)dx=\int f(\xi)d\mu_n(\xi).$$

だから (30. 12) により

$$\begin{cases}|T(f)|\leqq\overline{\lim_{n\to\infty}}\displaystyle\int|f(\xi)|d\mu_n(\xi)\leqq\|f\|_\infty,\\ R^N\text{ の上で } f(\xi)\geqq 0 \text{ ならば } T(f)\geqq 0.\end{cases}$$

---

*) その近傍はどんなに小さくてもよい.

よって T は $\mathfrak{S}$ の上の有界正値線型汎函数である．$\mathfrak{S}$ は L_∞ の中でノルム $\|\cdot\|_\infty$ に関して稠密（定理 24. 6）であるから，定理 26. 5 により $\mathfrak{B}_N$ の上の測度 μ で

$$T(f)=\int f(\xi)d\mu(\xi)$$

となるものが存在する．だから（30. 11）により，定理29. 4と Fubini の定理を使って

$$\int\varphi(x)\hat{f}(x)dx=\int f(\xi)\,d\mu(\xi)=\int d\mu(\xi)\int e^{2\pi i\xi\cdot x}\hat{f}(x)dx$$

$$=\int\hat{f}(x)dx\int e^{2\pi ix\cdot\xi}d\mu(\xi).$$

ここで $\{\hat{f};\ f\in\mathfrak{S}\}=\mathfrak{S}$（定理 29. 4 の系 1）だから，任意の $g\in\mathfrak{S}$ に対して

$$\int\left\{\varphi(x)-\int e^{2\pi i\xi\cdot x}d\mu(\xi)\right\}g(x)dx=0.$$

上の式の｛　｝の中は x の有界連続函数であるから，それは恒等的に 0 でなければならない（§24 問5の ii）参照）；すなわち（30. 10）が成立する．ここで $x=0$ とおけば $\mu(R^N)=\varphi(0)=1$ を得る．（証明終）

次に，任意の正の定符号函数が（30. 8）の形に書けるという Bochner（ボホナー）の定理を証明しよう；この定理は正の定符号函数に関する最も重要な定理である．まず準備として，

補助定理 1. $\varphi(x)$ が任意の正の定符号函数，$\psi(x)$ が（30. 8）の形に書ける正の定符号函数ならば，$\overline{\varphi(x)}$ および $\varphi(x)\psi(x)$ は正の定符号函数である．従って $\varphi(x)\overline{\psi(x)}$ も正の定符号函数である．

証明． $\overline{\varphi(x)}$ が正の定符号函数になることは，定義から明らかである．次に $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$ とおくとき，$f(x)$ が $x=0$ で連続なことは明らか．また任意の $x_1,\cdots,x_n\in R^N$ と任意の複素数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ に対して

$$\sum_{p,q}\alpha_p\bar{\alpha}_qf(x_p-x_q)=\int\left\{\sum_{p,q}\alpha_p\bar{\alpha}_qe^{2\pi i\xi\cdot(x_p-x_q)}\varphi(x_p-x_q)\right\}d\mu(\xi)$$

$$=\int\left\{\sum_{p,q}\alpha_pe^{2\pi i\xi\cdot x_p}\overline{\alpha_qe^{2\pi i\xi\cdot x_q}}\varphi(x_p-x_q)\right\}d\mu(\xi)\geqq 0$$

（$\varphi(x)$ が正の定符号函数なることにより上の式で $\{\cdots\}\geqq 0$ となるから）．だから $f(x)$ は正の定符号函数である．従って $\varphi(x)\overline{\psi(x)}=\overline{\overline{\varphi(x)}\psi(x)}$ も正の定符号函数である．

補助定理 2. $u_t(x)=(2\pi t)^{-N/2}e^{-|x|^2/2t}$（前の§の例で述べた函数）とすると，任意の正の定符号函数 $\varphi(x)$ に対して

$$\int u_t(x)\varphi(x)\,dx \geqq 0.$$

証明. $u_t(x)$ を $u_{2t}(x)$ でおきかえて証明してもよい.

$$\int \varphi(x)u_{2t}(x)dx = \int \varphi(x)\cdot u_t \otimes u_t(x)dx \qquad \text{(前§問1参照)}$$

$$= \int \varphi(x)dx \int u_t(x-y)u_t(y)dy$$

$$= \int dy \int \varphi(x-y)u_t(x)u_t(-y)dy \quad \left(\begin{matrix} y \text{ を } -y \text{ でおきかえ，積分の順序を} \\ \text{変えてから，} x \text{ を } x-y \text{ でおきかえた} \end{matrix}\right)$$

$$= \int\int \varphi(x-y)u_t(x)\overline{u_t(y)}dxdy \geqq 0 \quad \left(\begin{matrix} u_t(-y)=u_t(y)\geqq 0 \\ \text{と定理 30. 2 により} \end{matrix}\right).$$

定理 30. 5 (**Bochner の定理**). $\varphi(x)$ が正の定符号函数ならば，$(R^N, \mathfrak{B}_N)$ の上の測度 μ で $\mu(R^N)=\varphi(0)$ なるものが存在して

(30. 13) $$\varphi(x) = \int e^{2\pi i x\cdot\xi}d\mu(\xi)$$

が成立する.

証明. $\varphi(0)=0$ ならば，$\varphi(x)\equiv 0$ だから定理は自明である. $\varphi(0)>0$ ならば，$\varphi(x)/\varphi(0)$ を考えることにより $\varphi(0)=1$ の場合に帰着される. よって以下 $\varphi(0)=1$ として証明する.

R^N の上で $g(\xi)\geqq 0$ なる任意の $g\in\mathfrak{S}$ に対して，

$$f(x) = \int e^{2\pi i x\cdot\xi}g(\xi)d\xi$$

は定理 30. 3 によって正の定符号函数であり，また定理 29. 4 により $\hat{f}=g$ である. 一方，$u_t(x)$ を補助定理 2 に述べた函数とすると，函数

(30. 14) $$\varphi_n(x) = (2\pi n)^{N/2}u_n(x)\varphi(x) \equiv e^{-|x|^2/2n}\varphi(x) \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

は $L^1 \cap L^2$ に属する. だから Parseval の等式 (29. 16) により

$$\int \hat{\varphi}_n(\xi)g(\xi)d\xi = \int \varphi_n(x)\overline{f(x)}dx = (2\pi n)^{N/2}\int u_n(x)\varphi(x)\overline{f(x)}dx;$$

ここで補助定理 1 により $\varphi(x)\overline{f(x)}$ は正の定符号函数であるから，補助定理 2 により上の式の値は $\geqq 0$ となる. だから

(30. 15) $$\hat{\varphi}_n(\xi) \geqq 0 \qquad \text{(§24 問5の i) 参照).}$$

また $\hat{u}_t(\xi)=e^{-2\pi^2 t|\xi|^2}$ (前§参照) だから，Parseval の等式により

(30. 16)
$$\int\hat{\varphi}_n(\xi)e^{-2\pi^2|\xi|^2/m}d\xi=\int\varphi_n(x)u_{1/m}(x)dx\quad(m=1,\ 2,\ \cdots).$$

ここで $m\to\infty$ とするとき，(30. 15) により左辺の被積分函数は m について単調増加であり，右辺は $\varphi_n(0)$ に近づく（前§問2の i) 参照）．だから定理 13. 2 により

(30. 17)
$$\int\hat{\varphi}_n(\xi)d\xi=\varphi_n(0)=1.$$

従って (30. 15) により $\hat{\varphi}_n\in L^1$ である．だから Plancherel の定理 29. 6 により

(30. 18)
$$\varphi_n(x)=\int e^{2\pi ix\cdot\xi}\hat{\varphi}_n(\xi)d\xi.$$

ここで (30. 14) により $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$ であり，この収束は x の任意の有界領域で一様である．だから，$\mu_n(E)=\int_E\hat{\varphi}_n(\xi)d\xi$ なる測度 μ_n を考えると，(30. 17)，(30. 18) により，定理 30. 4 の仮定がすべて満たされている．だから定理 30. 4 により，(30. 13) が成立するような測度 μ で $\mu(R^N)=1=\varphi(0)$ なるものが存在する．

定理 30. 6. $\varphi(x)$，$\psi(x)$ が正の定符号函数ならば，積 $\varphi(x)\psi(x)$ も正の定符号函数である．

このことは，上の補助定理1と定理 30. 5 とから明らかである．

次に，正の定符号函数 $\varphi(x)$ を使って (30. 13) の意味で対応する μ を表わす式を与えよう．そのために，測度 μ に関する連続集合という概念を導入する．任意の集合 $E\subset R^N$ に対して，E の閉包および E の内点の集合をそれぞれ $\bar{E}$ および E° と書くことにする．$(R^N,\ \mathfrak{B}_N)$ の上の測度 μ があるとき，集合 $E\in\mathfrak{B}_N$ が μ **に関する連続集合**であるとは

$$\mu(\bar{E}-E^\circ)=0\quad\text{従って}\quad\mu(\bar{E})=\mu(E^\circ)=\mu(E)$$

が成立することである．特に区間 $I\subset R^N$ が上の意味で連続集合であるとき（μ **に関する**）**連続区間**と呼ぶ．

次の定理およびその証明の中では x，α，… の下の添字は座標の番号を表わすことにする．

定理 30. 7. Bochner の定理の式 (30. 13) における測度 μ は，函数 $\varphi(x)$ によって次のように表わされる：任意の $c>0$ に対して

$$\Gamma_c=\{x=(x_1,\ \cdots,\ x_N)\,;\ |x_\nu|\leqq c,\ \nu=1,\ \cdots,\ N\}$$
$$\equiv[-c,\ c]\times[-c,\ c]\times\cdots\times[-c,\ c]$$

とおくとき，有限区間 $I=(\alpha_1,\ \beta_1]\times\cdots\times(\alpha_N,\ \beta_N]$ が μ に関する連続区間ならば

(30. 19)
$$\mu(I)=\lim_{c\to\infty}\int_{\Gamma_c}\varphi(x)\prod_{\nu=1}^{N}\frac{e^{-2\pi i\beta_\nu x_\nu}-e^{-2\pi i\alpha_\nu x_\nu}}{-2\pi ix_\nu}dx.$$

従って測度 μ は正の定符号函数 $\varphi(x)$ によって一意的に定まる．

(30. 19) を **Lévy**（レヴィー）**の反転公式**という．

注意．(30. 19) の大体の意味は，次のようにおぼえておいてもよい．(30. 13) において測度 μ が Lebesgue 測度に関して絶対連続で，その密度函数 $f(\xi)$ が $L^1 \frown L^2$ に属するならば，(30. 13) は前 § の記号で $\varphi = \mathfrak{F}^* f$ と書けるから，Plancherel の定理 29. 6（およびその後の注意1）によって $f = \hat{\varphi}$，すなわち

$$f(\xi) = \underset{c\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \int_{\Gamma_c} \varphi(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx$$

となる．この式の両辺を $I = (\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times (\alpha_N, \beta_N]$ の上で $d\xi = d\xi_1 \cdots d\xi_N$ について積分し，極限移行や積分の順序を形式的に変えれば (30. 19) の形になる．もちろん μ は Lebesgue 測度に関して絶対連続とはかぎらないから，上の説明は，‘大体の様子’を述べたにすぎない．

定理 30. 7 の証明．はじめに，(30. 19) が証明されたものとして，これを使って測度 μ の一意性を証明する．

今 μ_1, μ_2 なる二つの測度に対して (30. 13) が，従って (30. 19) が成立すると仮定する．任意の有界閉区間（μ_1 或いは μ_2 の連続区間とはかぎらない）$I = [\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_N, \beta_N]$ と任意の $\delta > 0$ に対して

$$I_\delta = (\alpha_1 - \delta, \ \beta_1 + \delta] \times \cdots \times (\alpha_N - \delta, \ \beta_N + \delta]$$
$$B_\delta = \bar{I}_\delta - I_\delta{}^\circ \quad (\equiv I_\delta \text{ の境界})$$

とおくと，$\delta \neq \delta'$ ならば $B_\delta \frown B_{\delta'} = \phi$ であるから，δ の集合

$$\{\delta;\ \mu_1(B_\delta) > 0\}, \quad \{\delta;\ \mu_2(B_\delta) > 0\}$$

はどちらも高々可算無限集合である．*) だから，集合

$$\{\delta;\ 0 < \delta < 1,\ \mu_1(B_\delta) = \mu_2(B_\delta) = 0\}$$

は開区間 (0, 1) の中で稠密である．よって

$$\delta_n \downarrow 0, \ \mu_1(B_{\delta_n}) = \mu_2(B_{\delta_n}) = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

なる正数列 $\{\delta_n\}$ がとれる．このとき各 I_{δ_n} は μ_1, μ_2 のどちらに関しても連続集合であるから，(30. 19) により $\mu_1(I_{\delta_n}) = \mu_2(I_{\delta_n})$ となるが，$\lim_{n\to\infty} I_{\delta_n} = I$ だから，$\mu_1(I) = \mu_2(I)$ である．すなわち任意の有界閉区間に対して μ_1 と μ_2 との値は一致する．ところが，測度の性質により，集合族 $\mathfrak{M} = \{E;\ E \in \mathfrak{B}_N,\ \mu_1(E) = \mu_2(E)\}$ は単調族であり，

$$E_1, \ E_2 \in \mathfrak{M}, \ E_1 \frown E_2 = \phi \text{ ならば } E_1 + E_2 \in \mathfrak{M}$$

*) §6 の問2と同じ方法で証明できる．

である．だから $\mathfrak{M}\supset\mathfrak{B}_N$ (§15 問6参照)，すなわちすべての $E\in\mathfrak{B}_N$ に対して $\mu_1(E)=\mu_2(E)$ となる．

次に (30. 19) を証明しよう．本質的でない複雑さを避けるために R^1 の場合の証明を述べるが，その証明法は R^N の場合にもそのまま通用する；それには dx, $d\xi$ による積分を N 個の座標についてくりかえせばよいのであって，本質的には同じことであるが，式がかなり複雑になる．

$I=(\alpha,\ \beta]$ を μ に関する連続区間（有界）とし，任意の $c>0$ に対して

$$h(c)=\int_{\Gamma_c}\varphi(x)\frac{e^{-2\pi i\beta x}-e^{-2\pi i\alpha x}}{-2\pi ix}dx\equiv\int_{-c}^{c}\varphi(x)dx\int_{\alpha}^{\beta}e^{-2\pi ix\xi}d\xi \tag{30. 20}$$

とおくと，(30. 13) と Fubini の定理により

$$h(c)=\int_{-c}^{c}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi ix\eta}d\mu(\eta)\int_{\alpha}^{\beta}e^{-2\pi ix\xi}d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}d\mu(\eta)\int_{\alpha}^{\beta}d\xi\int_{-c}^{c}e^{2\pi ix(\eta-\xi)}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}d\mu(\eta)\int_{\alpha}^{\beta}\frac{2\sin 2\pi c(\xi-\eta)}{2\pi(\xi-\eta)}d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}d\mu(\eta)\int_{2\pi c(\alpha-\eta)}^{2\pi c(\beta-\eta)}\frac{\sin\lambda}{\pi\lambda}d\lambda$$

(変数変換 $2\pi c(\xi-\eta)=\lambda$ による)．ここで

$$\psi(x)=\int_0^x\frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda\quad\left(\text{ただし } x<0 \text{ のときは } \int_0^x=-\int_{-|x|}^0\right)$$

とおくと

$$h(c)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{\psi(2\pi c(\beta-\eta))-\psi(2\pi c(\alpha-\eta))\}d\mu(\eta). \tag{30. 21}$$

となるが，$\psi(x)$ は $(-\infty,\ \infty)$ で連続で

$$\lim_{x\to-\infty}\psi(x)=-\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to\infty}\psi(x)=\frac{\pi}{2}\ ^{*)}$$

であるから，$\psi(x)$ は $(-\infty,\ \infty)$ で有界であって

$$\lim_{c\to\infty}\{\psi(2\pi c(\beta-\eta))-\psi(2\pi c(\alpha-\eta))\}=\begin{cases}\pi & (\alpha<\eta<\beta \text{ のとき})\\ \dfrac{\pi}{2} & (\eta=\alpha \text{ または } \eta=\beta \text{ のとき})\\ 0 & (\eta<\alpha \text{ または } \eta>\beta \text{ のとき})\end{cases}$$

となる．だから (30. 21) の右辺に Lebesgue の収束定理が適用せられ，$(\alpha,\ \beta]$ が μ に関する連続区間なることにより

---

*) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda=\frac{\pi}{2}$ による；この公式は例えば，一松 信著，解析学序説（裳華房）上巻，293頁，例3を参照．

$$\lim_{c\to\infty} h(c)=\int_\alpha^\beta d\mu(\eta)=\mu((\alpha,\ \beta]).$$

この式と (30. 20) とから (30. 19) を得る．(証明終)

調和解析について． (30. 19) は R^1 の場合には Lebesgue-Stieltjes 積分 (§20) で

(30. 22) $$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\lambda t}dF(\lambda)$$

とも書ける，ここに $F(\lambda)=\mu((-\infty,\ \lambda])$ であって，これは $(-\infty,\ \infty)$ で有界な単調増加函数である．そこでもっと一般に，$F(\lambda)$ を $(-\infty,\ \infty)$ で有界変動の複素数値函数としても，Lebesgue-Stieltjes 積分 (30. 22) で定義される函数 $\varphi(t)$ を考えることができる．$e^{2\pi i\lambda t}$ は周期が $1/\lambda$ の‘単振動’(t を時間と見て) を表わすものと考えられるから，積分を有限和の極限と考えれば，(30. 22) は単振動を合成した一般の‘振動’と考えられる．函数 $F(\lambda)$ の不連続点は高々可算集合である (有界変動ということにより)．その不連続点 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots$ を振動 $\varphi(t)$ の**点スペクトル**と呼び，また $a_n=F(\lambda_n+0)-F(\lambda_n-0)(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおくとき，$a_1e^{2\pi i\lambda_1 t},\ a_2e^{2\pi i\lambda_2 t},\ \cdots$ をそれぞれ点スペクトル $\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots$ に対応する $\varphi(t)$ の**固有振動成分**と呼ぶ．また $F(\lambda)$ が閉区間 $[\alpha,\ \beta]$ で連続で $F(\beta)-F(\alpha)\neq 0$ のとき，$[\alpha,\ \beta]$ は振動 $\varphi(t)$ の**連続スペクトル**を含むという．この区間に対応する固有振動成分が $\int_\alpha^\beta e^{2\pi i\lambda t}dF(\lambda)$ で与えられるわけである．振動 $\varphi(t)$ が与えられたとき，その固有振動成分の‘振幅’a_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ および‘振幅の和’$F(\beta)-F(\alpha)$ を計算するのが調和解析の重要な問題であるが，R^1 の場合の (30. 19) がその一つの計算法を与えている；上に述べた R^1 の場合の (30. 19) の証明において，$\int\cdots d\mu$ を複素数値有界変動函数 $F(\lambda)$ による Lebesgue-Stieltjes 積分でおきかえてもよいことは容易にわかる．R^1 の場合の (30. 19) はもっと精密化されるが，それについては巻末の‘あとがき’にあげた書物 [19]，[20] などを見られたい．

§31. 偏微分方程式論への応用

この§では，定数係数の線型偏微分方程式の理論への，Fourier 解析の応用に関連した二・三の話題について述べる．以下においては線型でない偏微分方程式は考えないから，‘線型’という言葉を省略する．*) なお，この § の前半では一般の階数の偏微分作用素に

*) この§では，(偏) 微分方程式論の第1頁を読めば誰でも知って居られるような術語は，定義も説明もなしに用いる．すぐ後で例えば‘領域’を説明なしに使ってあるのも同様な理由によるが，素朴な意味で諒解せられればよい．――‘領域’を数学的に厳密に定義しようとすれば，まず‘連結’を定義してから，‘領域とは連結した開集合である’と言わなければならない．

ついて述べるが，高々2階ぐらいの，或いはもっと具体的にラプラシアン $\Delta=\partial^2/\partial x_1^2+\cdots+\partial^2/\partial x_N^2$ のようなものを，頭に浮べながら読まれてもよい．

はじめに予備概念を説明する．

R^N の中の領域 G で定義された函数 $f(x)$ が，G の内部に含まれる任意の有界閉集合の上で Lebesgue 可積分であるとき，$f(x)$ は G で**局所可積分**であるという．G で局所可積分な函数の全体を $L^1_{\mathrm{loc}}(G)$ と書く．*) また，G において k 階までのすべての偏導函数が存在して連続であるような函数 $f(x)$ は，G で C^k 級であるという．G で C^∞ 級の函数とは，G において無限回連続微分可能な函数のことである．G で C^∞ 級であって，台（§24 参照）が G の内部に含まれるような函数の全体を $\mathfrak{D}(G)$ と書く．

次に偏微分方程式の弱い解（weak solution）の概念を説明する．この定義だけは（さらに進んで他の書物を読まれる場合の参考のため）定数係数とはかぎらないで述べる．まず，§24 で述べたように $p=(p_1,\ \cdots,\ p_N)$ に対して

$$D^p=\frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_N^{p_N}}\qquad(|p|=p_1+\cdots+p_N)$$

とし，$a_p(x)$ を領域 $G(\subset R^N)$ で定義された実数値函数とすると，

$$D=\sum_{|p|\leqq n}a_p(x)D^p\qquad\begin{pmatrix}|p|=n\ \text{なる少くも一つの}\\ p\ \text{に対して}\ a_p(x)\not\equiv 0\end{pmatrix}\tag{31. 1}$$

は n **階偏微分作用素**になる．特に各 $p\ (|p|\leqq n)$ に対して $a_p(x)$ が $C^{|p|}$ 級ならば

$$D^*f(x)=\sum_{|p|\leqq n}(-1)^{|p|}D^p[a_p(x)f(x)]\tag{31. 2}$$

なる D^* が定義される；この D^* を D の**共役偏微分作用素**という．D が定数係数の偏微分作用素（すなわち，すべての $a_p(x)$ が定数）の場合には (31. 2) は

$$D^*f(x)=\sum_{|p|\leqq n}(-1)^{|p|}a_pD^pf(x)\tag{31. 2′}$$

と書ける．特にラプラシアン Δ に対しては $\Delta^*=\Delta$ である．さて，G で連続な函数 $f(x)$ が与えられたとき，或る函数 $u(x)$ が G で C^n 級で偏微分方程式

$$Du=f\tag{31. 3}$$

を満たすならば，任意の $\varphi\in\mathfrak{D}(G)$ に対して

$$\int_G Du(x)\cdot\varphi(x)dx=\int_G f(x)\varphi(x)dx\tag{31. 4}$$

となるから，左辺において部分積分を行なえば ((31. 1)，(31. 2) を見よ)

---

*) loc は局所的に (locally) を意味する．

(31. 4′)
$$\int_G u(x)\cdot D^*\varphi(x)dx=\int_G f(x)\varphi(x)dx$$

を得る（D^* の定義 (31. 2) は，(31. 4) から部分積分で (31. 4′) が出るようにしてあったのである）．逆に (31. 4′) が成立し，しかも $u(x)$ が C^n 級であれば，(31. 4′) から部分積分で (31. 4) が出るから $u(x)$ は (31. 3) の解（普通の意味で）になるが，*) $u(x)$ が偏微分可能でなくても，(31. 4′) だけは $u(x)\in L^1_{\mathrm{loc}}(G)$ なる条件のもとで意味をもつ．そこで，$u(x)$ が G で局所可積分であって任意の $\varphi\in\mathfrak{D}(G)$に対して (31. 4′) が成立するとき，$u$ は偏微分方程式 (31. 3) の**弱い解**であるという．この場合もちろん普通の意味の $Du(x)$ なる函数は必ずしも存在しない．弱い解に対して，普通の意味の（すなわちその方程式に現われる階数まで連続微分可能な）解を**真の解**ということがある．

最近の偏微分方程式論においては，Hilbert 空間や函数解析の方法が有力な道具であるが，その場合に多くは，函数 $u(x)$ の微分可能性などを考慮しないで (31. 4′) の形で扱うことにより，議論が見通しよくしかも容易になる．Hilbert 空間をなしているところの $L^2(G)$ に $u(x)$ が属していれば，任意の有界閉集合 $F\subset G$ に対して

$$\int_F|u(x)|dx\leqq\left\{\int_F|u(x)|^2du\right\}^{1/2}\left\{\int_F 1^2\,dx\right\}^{1/2}\quad\text{(Schwarz の不等式により)}$$

だから $u\in L^1_{\mathrm{loc}}(G)$ であり，また $\varphi\in\mathfrak{D}(G)$ ならば任意の D に対して $D\varphi\in L^2(G)$ であるから，Hilbert 空間 $L^2(G)$ における取扱いに上の弱い解の概念を適用できる．そうして，弱い解を構成してから，別の方法でそれが真の解であることが証明できる場合もあり（例えば後に述べる定理 31. 2 および定理 31. 3)，また問題によっては，(31. 4′) のような‘積分形’のままで，$u(x)$ の必要な性質が出る場合もあるので，弱い解の概念は最近重要になっている．

以後 D は定数係数（実数）の偏微分作用素とする．このとき D は，$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_N)$ の或る n 次多項式 $P(\xi)$ において，ξ を形式的ベクトル $\dfrac{\partial}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x_N}\right)$ でおきかえたもので表わされる：

(31. 5)
$$D=P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\equiv P\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_N}\right).$$

従って

(31. 5′)
$$D^*=P\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\equiv P\left(-\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,-\frac{\partial}{\partial x_N}\right).$$

---

*) (31. 4) から，§24 の問 4 とまったく同じ方法で $Du(x)=f(x)$ (a.e.) が言えるが，この等式の両辺は連続だから，すべての x でこの等式が成立する．

函数 f, φ の一方が L^2 に属しなくても，積 $f(x)\varphi(x)$ が R^N で可積分ならば，

$$(f,\ \varphi)=\int_{R^N} f(x)\overline{\varphi(x)}dx$$

と定義して，f と φ の内積と呼ぶ．例えば $f\in L^1$ で φ が有界，或いは $f\in L^1_{\mathrm{loc}}$, $\varphi\in L$ ならば $(f,\ \varphi)$ が定義される．従ってまた f, $\varphi\in L^1$ で g が有界なとき，$g^*(x)=\overline{g(-x)}$ とおけば，Fubini の定理により

$$(31.\ 6)\qquad (g\otimes f,\ \varphi)=\iint_{R^{2N}} g(x-y)f(y)\overline{\varphi(x)}dydx=(f,\ g^*\otimes\varphi).$$

さて，この§の第一の目的は次のことを証明することである：与えられた (31. 5) の形の D に対し，適当な整数 $m\geqq 0$ と有界函数 $E(x)$ が存在して，

(31. 7)　　$(I-\Delta)^m f$ が R^N で連続かつ可積分である

ような任意の函数 $f(x)$ に対して

$$(31.\ 8)\qquad u=E\otimes(I-\Delta)^m f$$

が方程式 $Du=f$ の弱い解になる．*) この方程式を R^N の中の有界領域 G で考える場合には，$f(x)$ が $\bar{G}$ を含む或る領域で C^{2m} 級であれば，G で $f(x)$ と一致して (31. 7) を満たすような R^N の上の函数が作れるから，上に述べたことはそのまま適用される．

まず，このような m と $E(x)$ とが存在するならば，それはどのようにして作られるべきかを考えよう（いわゆる‘発見的考察’）．(31. 8) の u が $Du=f$ の弱い解ならば，任意の $\varphi\in\mathfrak{D}(R^N)$ に対して $((I-\Delta)^m\varphi\in\mathfrak{D}(R^N)$ だから)

$$(f,\ (I-\Delta)^m\varphi)=(u,\ D^*(I-\Delta)^m\varphi)=(E\otimes(I-\Delta)^m f,\ D^*(I-\Delta)^m\varphi).$$

ここで (31. 7) により，最後の内積に公式 (31. 6) を適用し，また最初の内積において部分積分を施すことができて

$$(31.\ 9)\qquad ((I-\Delta)^m f,\ \varphi)=((I-\Delta)^m f,\ E^*\otimes D^*(I-\Delta)^m\varphi).$$

特に，任意の $g\in\mathfrak{S}$ に対して

$$(31.\ 10)\qquad f(x)=\int_{R^N} e^{2\pi i x\cdot\xi}\frac{\hat{g}(\xi)}{(1+|2\pi\xi|^2)^m}d\xi$$

とすると，§29 の結果により $(I-\Delta)^m f=g$ であり，またこの f は (31. 7) を満たすから，(31. 9) に代入することができて

$$(g,\ \varphi)=(g,\ E^*\otimes D^*(I-\Delta)^m\varphi).$$

だから E は

---

*) $m=0$ にとれるならば，$E(x)$ はいわゆる基本解である．$(I-\Delta)^m$ をつけて考える理由はすぐ後でわかる．

(31. 11) 任意の $\varphi\in\mathfrak{D}(R^N)$ に対して $E^*\otimes D^*(I-\Delta)^m\varphi=\varphi$

を満たす．逆に (31. 11) が成立すれば

(31. 11′) 任意の $\psi\in\mathfrak{S}$ に対して $E^*\otimes D^*(I-\Delta)^m\psi=\psi$

となる．なぜならば，

$$|x|\leqq 1 \text{ ならば } \omega(x)=1,\ |x|\geqq 2 \text{ ならば } \omega(x)=0$$

なる $\omega\in\mathfrak{D}(R^N)$ が存在する（後述補助定理 1 参照）から，$\psi\in\mathfrak{S}$ に対して

$$\varphi_n(x)=\omega(x/n)\psi(x) \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

とおくと $\varphi_n\in\mathfrak{D}(R^N)$ であって，任意の D^p に対して $n\to\infty$ のとき

$$D^p\varphi_n(x)\to D^p\psi(x) \text{（各点 } x \text{ で），} \|D^p\varphi_n-D^p\psi\|_1\to 0;$$

だから (31. 11) から (31. 11′) が出る．このとき任意の $\varphi\in\mathfrak{D}(R^N)$ に対して，(31. 10) と同様にして $(I-\Delta)^m\psi=\varphi$ なる $\psi\in\mathfrak{S}$ を定義できるから，前と同様の論法で

$$(u,\ D^*\varphi)=(E\otimes(I-\Delta)^m f,\ D^*(I-\Delta)^m\psi)=((I-\Delta)^m f,\ E^*\otimes D^*(I-\Delta)^m\psi)$$
$$=((I-\Delta)^m f,\ \psi)=(f,\ (I-\Delta)^m\psi)=(f,\ \varphi)$$

となり，u は $Du=f$ の弱い解である．

そこで (31. 11) を満たすような $E(x)$ について考察する．$E\in L^1$ ならば $E^*\in L^1$ であって $(E^*)^\wedge(\xi)=\overline{\hat{E}(\xi)}$ である．今は $E\in L^1$ は保証されていないが，(31. 11) の式の両辺の Fourier 変換を形式的に書くと，(31. 5′) と定理 29. 1 により

$$\overline{\hat{E}(\xi)}\cdot P(-2\pi i\xi)(1+|2\pi\xi|^2)^m\hat{\varphi}(\xi)=\hat{\varphi}(\xi).$$

この式が任意の $\varphi\in\mathfrak{D}(R^N)$ に対して成立するためには

$$\overline{\hat{E}(\xi)}=\frac{1}{P(-2\pi i\xi)(1+|2\pi\xi|^2)^m}$$

であればよいから，

(31. 12) $$E^*(x)=\int_{R^N}\frac{e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi}{P(-2\pi i\xi)(1+|2\pi\xi|^2)^m}$$

が定義できればよいことになる．この右辺の積分を適当に修正して

(♯) $|P(-2\pi i\xi)|$ が正の最小値をもつ

ようにできることを以下に述べるが，それができたとすれば m を適当に大きくとれば上の積分は明らかに存在する；例えば $m\geqq N$ ならば十分である，ここに N は空間 R^N の次元，すなわち偏微分方程式 $Du=f$ の独立変数の数である．

(♯) が成立するようにすること．(31. 5) の $P(\xi)$ において $\xi_1{}^n$ の係数が 0 でないとして一般性を失わない．ξ_1 を複素数として，ξ_1- 平面の中の積分路を実軸の外へ平行移動して根を避ける；ここで根とは，実数 $(\xi_2,\ \cdots,\ \xi_N)$ を固定したときに，ξ_1 の方程式とし

ての $P(-2\pi i\xi)=0$ の根を意味する．その各根を通って実軸に平行な直線を考える(かさなるものは1本として数える)と，高々 n 本の直線が引ける．だから $|\Im\xi_1|\leqq 1$ なる範囲内に，上のどの直線からも $1/n$ 以上の距離をもつ直線 l が存在する；その直線は $(\xi_2, \cdots, \xi_N)$ によって変化するから，$l=l(\xi_2, \cdots, \xi_N)$ で表わすことにする．このとき l は，R^{N-1} における Lebesgue 測度が0の $(\xi_2, \cdots, \xi_N)$-集合の点を除き，$(\xi_2, \cdots, \xi_N)$ について連続的に変化するようにとれる.*⁾だから (31. 12) のかわりに

$$(31.\ 12')\qquad E^*(x)=\int_{R^{N-1}} d\xi_2\cdots d\xi_N \int_{l(\xi_2,\cdots,\xi_N)} \frac{e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi_1}{P(-2\pi i\xi)(1+|2\pi\xi|^2)^m}$$

と定義すれば，この右辺においては (#) が成立する．

(31. 12′) で定義される E^* が実際に (31. 11) を満たすことを験証しよう．任意の $\varphi \in \mathfrak{D}(R^N)$ に対して，Fubini の定理と定理 29. 1 により

$$
\begin{aligned}
&E^*\otimes D^*(I-\Delta)^m\varphi(x)\\
&=\int_{R^N}\left\{\int_{R^{N-1}}\int_l \frac{e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}}{P(-2\pi i\xi)(1+|2\pi\xi|^2)^m}d\xi\right\}D^*(I-\Delta)^m\varphi(y)dy\\
&=\int_{R^{N-1}}\int_l \frac{e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi}{P(-2\pi i\xi)(1+|2\pi\xi|^2)^m}\int_{R^N} e^{-2\pi i y\cdot\xi}D^*(I-\Delta)^m\varphi(y)dy\\
&=\int_{R^{N-1}}\int_l \frac{e^{2\pi i x\cdot\xi}}{P(-2\pi i\xi)(1+|2\pi\xi|^2)^m}P(-2\pi i\xi)(1+|2\pi\xi|^2)^m\hat{\varphi}(\xi)d\xi
\end{aligned}
$$

(ここで $P(-2\pi i\xi)(1+|2\pi\xi|^2)^m$ で約分することができて**⁾)

$$=\int_{R^{N-1}}\int_l e^{2\pi i x\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)d\xi=\varphi(x)$$

(最後の等号は，§29 問4と同様にして証明できる)．これで (31. 11) が示された．

以上により次の定理を得る．

定理 31. 1. D を定数係数の偏微分作用素とするとき，$f(x)$ が適当な階数 (例えば独立変数の個数 N の2倍) まで連続微分可能な函数で (31. 7) を満たすならば，偏微分方程式 $Du=f$ は (31. 12′) と (31. 8) で与えられる弱い解 u をもつ，ここで (31. 8) における m は整数 $\geqq 0$ で，例えば $m=N$ にとれる．

上の定理において $(1+|2\pi\xi|^2)^m$ は (31. 12′) の積分が存在するための因数であるから $P(\xi)$ の形によっては，m は N より小さい数でもよい．それに従って $f(x)$ に要求される連続微分可能の回数も少なくできる．特に D が次に述べる‘楕円形’の場合には $m=0$

---

*⁾　後述注意1参照．

**⁾　積分路 l が $P(-2\pi i\xi)=0$ の根を避けているから．

でよく，さらに $P(-2\pi i\xi)$ の符号が R^N の上で一定なら上の (♯) のための変形は不要である．

n 次多項式 $P(\xi)$ は

$P(\xi)=Q(\xi)+R(\xi)$，$Q(\xi)$ は n 次斉次多項式，$R(\xi)$ は $n-1$ 次以下の多項式，

と表わされる．ここで $Q(\xi)$ の符号が R^N の上で一定で，$\xi=0$ のときだけ $Q(\xi)=0$ となる場合に，偏微分作用素 $D=P(\partial/\partial x)$ は**楕円型**であるという．例えばラプラシアン Δ は楕円型である．一般に D が楕円型ならばその階数 n は偶数である（n が奇数ならば n 次多項式 $Q(\xi)$ は一定符号にはなれない）．よって $n=2k$ としたとき，$(-1)^kQ(\xi)\geqq 0$（等号は $\xi=0$ のときだけ成立）となる場合に

$$\frac{\partial}{\partial t}-P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}-P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\qquad (t>0)$$

の形の偏微分作用素はそれぞれ**放物型**，**双曲型**と呼ばれる．上の放物型偏微分作用素については，(31. 12′) のかわりに次のような $K(t, x)$ を作るのがよい：

(31. 13)
$$K(t, x)=\int_{R^N} e^{2\pi i x\cdot\xi}e^{tP(2\pi i\xi)}d\xi$$

とすると，任意の有界連続函数 $u_0(x)$，$f(t, x)$ に対して

$$u(t, x)=\int_{R^N}K(t, x-y)u_0(y)dy+\int_0^t d\tau\int_{R^N}K(t-\tau, x-y)f(\tau, y)dy\qquad (t>0)$$

が $\partial u/\partial t=P(\partial/\partial x)u+f$ の弱い解であるばかりでなく，‘初期条件’

(31. 14)
$$\lim_{t\downarrow 0}u(t, x)=u_0(x)$$

を満たすことが，容易に験証される．(f が C^1 級ならば真の解になるのであるが，証明は省略する．) 特に $P(\partial/\partial x)$ がラプラシアン Δ の場合には $P(\xi)=|\xi|^2$，従って

$$e^{tP(2\pi i\xi)}=e^{-4\pi^2 t|\xi|^2}$$

となる．これは §29 の例に示した $\hat{u}_t(\xi)$ と同じ形であるから，(31. 13) の $K(t, x)$ は

(31. 15)
$$K(t, x)=(4\pi t)^{-N/2}e^{-|x|^2/4t}$$

となる．この K に対して $u=K(t, \cdot)\otimes u_0$ が $\partial u/\partial t=\Delta u$ と (31. 14) とを満たすことは，それぞれ §14 問2 と §13 問2 とで見たとおりである．

次に，弱い解と真の解との関係を，二階偏微分方程式の三つの基本型：

(31. 16) $\quad \Delta u=0 \qquad$（楕円型），

(31. 17) $\quad \partial u/\partial t-\Delta u=0 \qquad$（放物型），

(31. 18) $\quad \partial^2 u/\partial t^2-\Delta u=0 \qquad$（双曲型）

について考える．結果だけ先に述べると，

i)　楕円型および放物型偏微分方程式の弱い解は必ず真の解である*)

けれども，

ii)　双曲型偏微分方程式の弱い解は必ずしも真の解でない．

i) は (31. 16), (31. 17) の右辺が C^1 級の函数 f であっても，以下に述べる定理 31. 2, 定理 31. 3 の証明とほとんど同様にして証明できる.**)さらに Δ を任意の楕円型偏微分作用素でおきかえてもよいのであるが，証明がかなり長くなるので省略する．

なお，ついでながら，領域 $G\subset R^N$ で $\Delta u=0$ の真の解であるような函数 u は G で**調和**である（或いは G の上の**調和函数**である）といわれる．G で調和な函数は，次の定理 31. 2 により，G で無限回連続微分可能である．

補助定理 1. $\bar{G}\subset G_1$ なる有界領域 G, $G_1\subset R^N$ があるとき，函数 $\omega(x)\in\mathfrak{D}(R^N)$ で，R^N において $0\leqq\omega(x)\leqq 1$, 特に $x\in\bar{G}$ ならば $\omega(x)=1$, $x\notin G_1$ ならば $\omega(x)=0$ となるものが存在する．

証明. 点 $y\in R^N$ と $\delta>0$ とに対して $U(y;\ \delta)=\{x;\ |x-y|<\delta\}$ とする．$\bar{G}_1$ の各点 y に対して，適当な $\delta_y>0$ をとって

$$\begin{cases} y\in\bar{G} \text{ に対しては } U(y,\ \delta_y)\subset G_1, \\ y\in\bar{G}_1-\bar{G} \text{ に対しては } U(y,\ \delta_y)\subset R^N-\bar{G} \end{cases}$$

となるようにできる．今後 $U(y,\ \delta_y)$ を単に $U(y)$ と書く．このとき Borel-Lebesgue の被覆定理（付録§2 定理1）により，適当な有限個の点 $y^{(1)}, \cdots, y^{(p)}\in\bar{G}$ を

$$\bar{G}\subset\bigcup_{k=1}^{p}U(y^{(k)})$$

なるようにとり，さらに $y^{(p+1)}, \cdots, y^{(q)}\in\bar{G}_1-\bigcup_{k=1}^{p}U(y^{(k)})$ を

$$\bar{G}_1-\bigcup_{k=1}^{p}U(y^{(k)})\subset\bigcup_{k=p+1}^{q}U(y^{(k)})$$

なるようにとれる．従って $\bar{G}_1\subset\bigcup_{k=1}^{q}U(y^{(k)})$. だから，$\delta=\delta_{y^{(k)}}$ に対する §24 例2 の函数 $f_\delta(x)$ を $f_k(x)$ と書くことにして，

---

*)　ここでは記憶に便利のためにこのように標語的に述べておくが，厳密にいうと‘任意の弱い解は或る真の解とほとんどいたる所一致する’のである（後述定理 31. 2 および 31. 3 参照）．一方次の双曲型の場合は，弱い解があるとき，それとほとんどいたる所一致するような真の解が存在するとはかぎらないのである．

**)　ただし，u とほとんどいたる所一致する真の解の微分可能の階数は，f の微分可能の階数に関係する．後述注意 2 参照．

$$\omega(x)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{p} f_k(x-y^{(k)}) \Big/ \sum_{k=1}^{q} f_k(x-y^{(k)}) & (x\in G_1)\\ 0 & (x\in R^N-G_1)\end{cases}$$

と定義すると，これが求めるものであることは，$f_\delta(x)$ の性質から容易にわかる．

補助定理 2. 領域 G, G_1 を補助定理1のとおりとして，$\bar{G}$ と $G_1{}^c$ との距離（付録§3）を δ_0 とし，函数 $h_\delta(x)$ $(\delta>0)$ を §24 例2で述べたものとする．このとき，任意の $u\in L^1{}_{\mathrm{loc}}(G_1)$ に対して，$\delta_0>\delta>0$ なるかぎり

$$u_\delta(x)=\int_{G_1} h_\delta(x-y)u(y)dy \tag{31. 19}$$

が G で定義せられ，i) 各 $u_\delta(x)$ は G で C^∞ 級であって

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\int_G |u_\delta(x)-u(x)|dx=0, \tag{31. 20}$$

ii) 特に $u(x)$ が G_1 において $Du=0$ の弱い解であるならば，各 $u_\delta(x)$ は G において $Du_\delta=0$ の真の解である．(D は任意の定数係数の偏微分作用素.)

証明. $\delta_0>\delta>0$ ならば，

$$\bar{G}\subset G_\delta\subset\bar{G}_\delta\subset G_1,\ \ \rho(\bar{G},\ G_\delta{}^c)>\delta \qquad (\rho \text{ は集合の距離})$$

なる領域 G_δ が存在し，$x\in G$ ならば (31. 19) の右辺の積分は G_δ の上の積分と考えてよい（$\because$ $x\in G$, $y\notin G_\delta$ ならば $h_\delta(x-y)=0$）．δ を固定すれば $h_\delta(x)$ およびその各偏導函数は有界であり，また仮定により $u\in L^1(G_\delta)$ と考えてよい．だから $u_\delta(x)$ は G の上で定義せられ，しかも定理 14. 2 が何回でも適用されるから，$u_\delta(x)$ は G で C^∞ 級であって任意の D^p に対して（次の式における D^p の添え字 x は，$h_\delta(x-y)$ を x の函数として D^p を作用させることを意味する）

$$D^p u_\delta(x)=\int_{G_1}(D^p)_x h_\delta(x-y)\cdot u(y)dy. \tag{31. 21}$$

また (31. 20) は §24 の補助定理2と同様にして証明される．次に，(31. 21) により，任意の定数係数の偏微分作用素 D に対して

$$Du_\delta(x)=\int_{G_1} D_x h_\delta(x-y)\cdot u(y)dy=\int_{G_1} D_y{}^* h_\delta(x-y)\cdot u(y)dy$$

となる．ここで，任意の $x\in G$ を固定するとき $h_\delta(x-y)$ は y の函数として $\mathfrak{D}(G_1)$ に属するから，u が $Du=0$ の弱い解ならば，上の式の最後の積分は0になる．すなわち u_δ は $Du_\delta=0$ を満たす．

定理 31. 2. G を R^N の中の任意の領域とする．函数 $u\in L^1{}_{\mathrm{loc}}(G)$ が G において $\Delta u=0$ の弱い解であるならば，G で C^∞ 級の函数 $v(x)$ で $\Delta v(x)=0$ を満たすものが存

在して，$u(x)=v(x)$ (a. e.) となる．

証明. $\bar{G}_0\subset G$ なる任意の有界領域 G_0 をとり，さらに

$$\bar{G}_0\subset G_1\subset\bar{G}_1\subset G_2\subset\bar{G}_2\subset G_3\subset\bar{G}_3\subset G$$

なる有界領域 G_1, G_2, G_3 をとると，補助定理1により次のような函数 ω_1, $\omega_2\in\mathfrak{D}(G)$ が存在する：

$$G\text{ 全体で } 0\leqq\omega_1(x)\leqq 1,\quad 0\leqq\omega_2(x)\leqq 1,$$

$$\omega_1(x)=\begin{cases}1 & (x\in\bar{G}_0)\\ 0 & (x\in G-G_1),\end{cases}\qquad \omega_2(x)=\begin{cases}1 & (x\in\bar{G}_2)\\ 0 & (x\in G-G_3).\end{cases}$$

$K(t, x)$ を (31. 15) で定義された函数とし，

$$K_0(t, x, y)=\omega_1(x)K(t, x-y)\omega_2(y),$$

$$K_1(t, x, y)=[\varDelta_y-\partial/\partial t]K_0(t, x, y)$$

とおく（$\varDelta$ の添え字 y は，$K_0(t, x, y)$ を y の函数と考えて $\varDelta$ を作用させることを意味する）．このとき $K(t, x)$ の性質から，簡単な計算によって

(31. 22) $K_0(t, x, y)$ は $(0, \infty)\times G\times G$ で C^∞ 級である，

(31. 23) $f(x)$ が G で連続ならば $\displaystyle\lim_{t\downarrow 0}\int_G K_0(t, x, y)f(y)dy=\omega_1(x)f(x)$

(§13 問2参照)，

(31. 24) $x\notin G_1$ または $y\in\bar{G}_2$ ならば $K_1(t, x, y)=0.$

一方，$x\in G_1$ かつ $y\notin\bar{G}_2$ ならば $|x-y|$ は一定数 $\delta>0$ より大きいから，上の (31. 24) とあわせて次のことがわかる．

(31. 25) $\begin{cases}t\leqq 0 \text{ のとき } K_1(t, x, y)=0 \text{ と定義すると，} K_1(t, x, y) \text{ は}\\ (-\infty, \infty)\times G\times G \text{ で有界で } C^\infty \text{ 級である．}\end{cases}$

さて $\varDelta u=0$ の弱い解 u から，補助定理2に述べた方法により，G_3 で函数 $u_\delta(x)$ を定義すると，$\varDelta u_\delta(x)=0$ である．だから $K_0(t, x, y)$ と $K_1(t, x, y)$ の定義により

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G K_0(1-t, x, y)u_\delta(y)dy-\int_G K_1(1-t, x, y)u_\delta(y)dy$$

$$=-\int_G \varDelta_y K_0(1-t, x, y)\cdot u_\delta(y)dy=-\int_G K_0(1-t, x, y)\cdot\varDelta_y u_\delta(y)dy=0.$$

左辺を $0<t<1$ で積分すれば，(31. 23) と (31. 25) により任意の $x\in G_3$ に対して

(31. 26) $\displaystyle\omega_1(x)u_\delta(x)-\int_G K_0(1, x, y)u_\delta(y)dy-\int_0^1 dt\int_G K_1(1-t, x, y)u_\delta(y)dy=0$

$\delta\downarrow 0$ とすると，ほとんどすべての $x\in G_0$ に対して

$$(31.\ 27)\qquad u(x)-\int_G K_0(1,\ x,\ y)u(y)dy-\int_0^1 dt\int_G K_1(1-t,\ x,\ y)u(y)dy=0$$

を得る，なぜならば，$u_\delta(x)$ は補助定理 2 により $u(x)$ に $L^1(G_3)$ におけるノルムに関して収束し，従って (31. 22), (31. 25) と Schwarz の不等式により，(31. 26) の第二項，第三項がそれぞれ (31. 27) の第二項，第三項に G_3 で一様収束するからである．(31. 27) の第二項，第三項は (31. 22), (31. 25) により G_0 で C^∞ 級であり，一方 G_0 は任意に G に近くとれるから，$u(x)$ は G で C^∞ 級の或る函数 $v(x)$ とほとんどいたる所一致する．

定理 31. 3. G を R^N の中の任意の領域，$(s_0,\ t_0)$ を R^1 の中の任意の開区間とする．$u(t,\ x)$ が $(s_0,\ t_0)\times G$ において局所可積分であって，$\partial u/\partial t=\Delta u$ の弱い解であるならば，$(s_0,\ t_0)\times G$ で C^∞ 級の函数 $v(t,\ x)$ で $\partial v/\partial t=\Delta v$ を満たすものが存在して，$u(t,\ x)=v(t,\ x)$ (a. e.) となる．

証明． $s_0<s_1<t_1<t_0$ なる任意の有限区間 $(s_1,\ t_1)$ と，$\bar{G}_0\subset G$ なる任意の有界領域 G_0 とをとり，前定理の証明と同様に領域 G_1, G_2, G_3 と函数 $K_0(t,\ x,\ y)$, $K_1(t,\ x,\ y)$ とを定める．R^{N+1} において，補助定理 2 における $h_\delta(x)$ と同様な函数 $h_\delta(t,\ x)$ $(t\in R^1,\ x\in R^N)$ を作り，これと $u(t,\ x)$ とから補助定理 2 のように $u_\delta(t,\ x)$ を作ると，δ が十分小さければ $u_\delta(t,\ x)$ は $(s_1,\ t_1)\times\bar{G}_3$ で $\partial u_\delta/\partial t-\Delta u_\delta=0$ の真の解である．だから，$s_1<s<t<t_1$ ならば前定理の証明と同じ手順で

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_G K_0(t-s,\ x,\ y)u_\delta(s,\ y)dy=\int_G K_1(t-s,\ x,\ y)u_\delta(s,\ y)dy.$$

この両辺を $s_1<s<t$ で積分してから $\delta\downarrow 0$ とすれば，ほとんどすべての $(t,\ x)\in(s_1,\ t_1)\times G_0$ に対して

$$u(t,\ x)=\int_G K_0(t-s_1,\ x,\ y)u(s_1,\ y)dy+\int_{s_1}^t ds\int_G K_1(t-s,\ x,\ y)u(s,\ y)dy$$

を得る．この右辺は $(s_1,\ t_0)\times G_3$ で C^∞ 級の函数だから，この式から定理 31. 3 が得られる．

最後に，双曲型偏微分方程式 $\partial^2u/\partial t^2-\Delta u=0$ の弱い解とほとんどいたる所一致する真の解が必ずしも存在しないことは，次の定理によってわかる；例えば次の定理で

$$f(\tau)=0\ \ (\tau<0),\quad =1\ \ (\tau\geqq 0)$$

とすれば，$u(t,\ x)=f(\sqrt{N}\,t+x_1+\cdots+x_N)$ とほとんどいたる所一致するような連続函数は存在しない．

定理 31. 4. $f(\tau)$ が $(-\infty,\ \infty)$ において有界可測ならば，

$$u(t,\ x)=f(\sqrt{N}t+x_1+\cdots+x_N)$$

は $R^1\times R^N$ において$\partial^2u/\partial t^2-\Delta u=0$ の弱い解である.

証明. 任意の $\varphi(t,\ x)\in\mathfrak{D}(R^{N+1})$ に対して, $G=\{(t,\ x);\ \varphi(t,\ x)\neq 0\}$ は有界な開集合だから, $\bar{G}\subset\{(t,\ x);\ |\sqrt{N}t+x_1+\cdots+x_N|<M,\ |x_j|<M\ (i=1,\ \cdots,\ N)\}$ となるような $M>0$ が存在する. R^1 において, 補助定理2における $h_\delta(x)$ と同様な函数 $h_\delta(\tau)$ を作り,

$$g_\delta(\tau)=\int_{-M}^{M}h_\delta(\tau-\sigma)f(\sigma)d\sigma$$

とおくと, 補助定理2と同様にして,

$$g_\delta\in\mathfrak{D}(R^1),\quad \lim_{\delta\downarrow 0}\int_{-M}^{M}|g_\delta(\tau)-f(\tau)|^2d\tau=0.$$

だから, $u_\delta(t,\ x)=g_\delta(\sqrt{N}t+x_1+\cdots+x_N)$ とおくと, $u_\delta(t,\ x)$ は $\partial^2u_\delta/\partial t^2-\Delta u_\delta=0$ の真の解であり, $\delta\downarrow 0$ のとき

$$\int_G|u_\delta(t,\ x)-u(t,\ x)|^2dxdt\leqq\int_{-M}^{M}\cdots\int_{-M}^{M}d\xi_1\cdots d\xi_N\int_{-M}^{M}|g_\delta(\tau)-g(\tau)|^2\sqrt{N}d\tau\to 0$$

(変数変換 $\tau=\sqrt{N}t+x_1+\cdots+x_N,\ \xi_j=x_j\ (j=1,\ \cdots,\ N)$ による). だから

$$\int_{R^{N+1}}u(t,\ x)\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\varphi(t,\ x)dxdt$$

$$=\lim_{\delta\downarrow 0}\int_{R^{N+1}}u_\delta(t,\ x)\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\varphi(t,\ x)dxdt=0.$$

すなわち $u(t,\ x)$ は $\partial^2u/\partial t^2-\Delta u=0$ の弱い解である.

注意 1. 定理 31.1 を証明するための $E^*(x)$ の構成において, l が R^{N-1} の点 $\xi=(\xi_2,\ \cdots,\ \xi_N)$ について,*) 測度0の集合の上を除いて連続的に変化するようにとれることは, 次のようにしてわかる. 直線 $l=l(\xi)$ と実軸との距離 $\rho(\xi)$ ($\Im\xi_1<0$ の部分にあるときは負の値とする) が ξ の函数として上のような性質をもつように定義できればよい. 任意の点 $\eta\in R^{N-1}$ に対して, 243 頁の説明からわかるように, 適当な $\delta_\eta>0$ が存在して $U(\eta)=\{\xi;\ |\xi-\eta|<\delta_\eta\}$ の閉包 $\overline{U(\eta)}$ において連続な $\rho_\eta(\xi)$ が定義できる. このとき Lindelöf の被覆定理 (付録 §2 定理2) により $R^{N-1}=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}U(\eta_\nu)$ なる $\{\eta_\nu\}$ が存在し, $\mu\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty}[\overline{U(\eta_\nu)}-U(\eta_\nu)]\right)\leqq\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu(\overline{U(\eta_\nu)}-U(\eta_\nu))=0$ である. だから, $\xi\in U(\eta_1)$ のとき $\rho(\xi)=\rho_{\eta_1}(\xi)$, 一般に $\xi\in U(\eta_n)-\bigcup_{\nu=1}^{n-1}U(\eta_\nu)$ のとき $\rho(\xi)=\rho_{\eta_n}(\xi)\ (n\geqq 2)$ と定義すれば,

---

*) この注意1の中にかぎり $\xi,\ \eta$ は R^{N-1} の点を表わす (たとえば $\eta=(\eta_2,\ \cdots,\ \eta_N)$). ただし ξ_1 なる記号は243頁と同じ意味とする.

$\rho(\xi)$ が求めるものである.

注意 2. (31. 16) と (31. 17) において右辺が与えられた函数 f である場合の, 定理 31. 2 および 31. 3 の v の微分可能性について, 結果だけ付記しておこう. f が C^k 級ならば, 定理 31. 2 の v はC^{k+1} 級であり, 定理 31. 3 の v は C^k 級 ($x=(x_1, \cdots, x_N)$ だけについては C^{k+1} 級) である. (Hölder 連続という概念を使うともう少し精密化されるが, ここではこれ以上立ち入らないことにする.)

問 1. $u_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ が領域 $G\subset R^N$ で調和とする. G で局所可積分な函数 $u(x)$ があって, $\bar{G}_0\subset G$ なる任意の有界領域 G_0 に対して $\lim_{n\to\infty}\int_{G_0}|u_n(x)-u(x)|dx=0$ ならば $u(x)$ は G で調和な或る函数 $v(x)$ と a. e. $x\in G$ で一致する.

問 2. 複素数平面の中の領域 G で一価正則で $\iint_G|f(z)|^2dxdy<\infty$ $(z=x+iy)$ なる函数 $f(z)$ の全体は, 内積 $(f, g)=\iint_G f(z)\overline{g(z)}dxdy$ によって Hilbert 空間をなす. (完備性の証明には, 函数の実数部分と虚数部分について前題の考え方を使って極限函数の調和なことを出し, Cauchy-Riemann の微分方程式を導き出す.)

付録 Euclid 空間における点集合論

本文において使われているところの，N 次元 Euclid 空間における点集合論の結果について，まとめて解説しよう.*) 点集合論とは，一口に言うと，距離の概念に関係した集合の性質をしらべることである.**) N 次元空間 R^N の点 x は

$$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)$$

と N 個の実数の列で表わされる．また R^N の二点

$$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N),\quad y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_N)$$

の距離 $\rho(x,\ y)$ が

$$\rho(x,\ y)=\{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_N-y_N)^2\}^{1/2}$$

で定義されることも，よく知られている．このとき

(1) $\rho(x,\ y)\geqq 0$; 等号が成立するのは $x=y$ のとき，かつそのときにかぎる；

(2) $\rho(x,\ y)=\rho(y,\ x)$;

(3) $\rho(x,\ y)+\rho(y,\ z)\geqq\rho(x,\ z)$

が成立する；(3) は三角形の三辺の長さの関係に相当する式で，**三角不等式**と呼ばれる．(1) と (2) は明らかであるから，(3) を証明しておこう．

$$x=(x_1,\ \cdots,\ x_N),\quad y=(y_1,\ \cdots,\ y_N),\quad z=(z_1,\ \cdots,\ z_N)$$

とおくと (3) は

$$\sqrt{\sum_{\nu=1}^{N}(x_\nu-y_\nu)^2}+\sqrt{\sum_{\nu=1}^{N}(y_\nu-z_\nu)^2}\geqq\sqrt{\sum_{\nu=1}^{N}(x_\nu-z_\nu)^2}$$

となるから，$x_\nu-y_\nu=u_\nu$, $y_\nu-z_\nu=v_\nu$ とおけば，この式は

$$\sqrt{\sum_{\nu=1}^{N}u_\nu^2}+\sqrt{\sum_{\nu=1}^{N}v_\nu^2}\geqq\sqrt{\sum_{\nu=1}^{N}(u_\nu+v_\nu)^2}$$

となる．この両辺を 2 乗して簡単にすると

$$\sqrt{\sum_{\nu=1}^{N}u_\nu^2}\sqrt{\sum_{\nu=1}^{N}v_\nu^2}\geqq\sum_{\nu=1}^{N}u_\nu v_\nu;$$

この右辺が負ならこの式は明らかだから，右辺が負でないとして両辺を 2 乗すると

---

*) 以下の記述では，本文 §2 の内容（一般集合論の初等的知識）だけを既知とする．

**) 本当はもっと一般的な言い方をすべきであるが，ここでは Euclid 空間を対象として，このように述べておく．

(4)
$$\left(\sum_{\nu=1}^{N} u_\nu^2\right)\left(\sum_{\nu=1}^{N} v_\nu^2\right) \geqq \left(\sum_{\nu=1}^{N} u_\nu v_\nu\right)^2.$$

この式は次のようにして証明される．任意の実数 λ に対して

$$\left(\sum_{\nu=1}^{N} u_\nu^2\right)\lambda^2+2\left(\sum_{\nu=1}^{N} u_\nu v_\nu\right)\lambda+\sum_{\nu=1}^{N} v_\nu^2=\sum_{\nu=1}^{N}(u_\nu\lambda+v_\nu)^2\geqq 0;$$

この左辺を λ の 2 次式と考えると，これが負にならないためには，判別式 $\leqq 0$ でなければならない；このことを式に書けば (4) を得る．

一般に (Euclid 空間とはかぎらない) 抽象空間 X において，二点 x, y の函数 $\rho(x, y)$ で上の (1), (2), (3) を満たすものが定義されているとき，X を**距離空間**と呼び*) $\rho(x, y)$ を二点 x, y の**距離**と呼ぶ．また上の (1), (2), (3) を**距離の公理**という．この付録の内容は，§2 と §3 の定理 5 とを除いてはすべて任意の距離空間で述べることができるけれども，簡単のために §3 までは R^N で述べておく．最後の §4 では，一般の距離空間について本文中で必要なことを述べる．

この付録は，本文中で使われている事項について，必要最小限度のなるべく平易な解説を目的とするから，点集合論としてはその組立ても内容全体もまったく不完全なものである．しかし本書を理解するのに必要な程度の厳密性は保持するようにし，従って或る事項の説明の準備として必要な事項は（本文中で直接引用されていなくても）すべて解説を与えることにした．

§1. 近傍，閉集合，開集合．

R^N の一点 x と正数 ε とが与えられたとき，

$$\rho(x,\ y)<\varepsilon$$

を満たす点 $y\in R^N$ の全体（すなわち x を中心とし ε を半径とする球の内部**)）を，x の ε-**近傍**と呼び $U(x, \varepsilon)$ と書く；すなわち

$$U(x,\ \varepsilon)=\{y;\ \rho(x,\ y)<\varepsilon\}.$$

一般に点 x だけを指定したとき，上の形の集合（ε は任意の正数）を x の**近傍**と呼び，特に ε を明示する必要がない場合は $U(x)$, $V(x)$ などの記号を使うこともある．

集合 $E\subset R^N$ が与えられたとする．E の点 x に対して，x の十分小さい近傍 $U(x)$ をとって $U(x)$ の中には x 以外の E の点がない（すなわち $U(x)\frown E$ は一点 x だけからなる）ようにできるとき，x を E の**孤立点**という．また R^N の点 x のどのような

---

*) R^N 以外の距離空間の例は §4 で与える．

**) R^1 においては開区間 $(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$，$R^2$ においては中心が x，半径が ε の円の内部である．

(小さい) 近傍 $U(x)$ にも無数に多くの E の点が含まれる (すなわち $U(x)\frown E$ が無限集合である) とき，x を E の**集積点**という．E の集積点は必ずしも E に含まれない．

例. R^1 において $E=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$ とすると，E の点はすべて E の孤立点であり，点 0 は E の集積点である．R^N において

$$E=\{(x_1, \cdots, x_N);\ x_1{}^2+\cdots+x_N{}^2<1\}\quad(単位球の内部)$$

とすると，E は孤立点を持たないし，E の点ばかりでなく

$$x_1{}^2+\cdots+x_N{}^2=1$$

なる点 $(x_1, \cdots, x_N)$ (単位球面上の点) はすべて E の集積点である．また R^N の有理点*) の全体を E とすると，R^N の各点が E の集積点になる；このことは，任意の実数が有理数列の極限値になることから容易にわかる．

定理 1. 点 x が集合 E の集積点であるための必要十分条件は，x の任意の近傍が x 以外の E の点を少なくとも一つ含むことである．

証明. 必要なことは明らかであるから，十分なことを示す．点 x の任意の ε-近傍 $U(x, \varepsilon)$ をとると，$U(x, \varepsilon)$ の中に x 以外の E の点 x_1 がある．次に $\varepsilon_1=\rho(x, x_1)$ とおくと，$U(x, \varepsilon_1)$ の中に x 以外の E の点 x_2 があり，$x_2\neq x_1$ である．次に $\varepsilon_2=\rho(x, x_2)$ とおくと，$U(x, \varepsilon_2)$ の中に x 以外の E の点 x_3 があり，$x_3\notin\{x_1, x_2,\}$ である．この操作をくり返すと，$U(x, \varepsilon)$ の中に x 以外の E の点からなる無限集合 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ が作れる．だから x は E の集積点である．(証明終)

集合 E の集積点の全体を E' と書き，E の**導集合**という．空集合の導集合は空集合である．E と E' の和集合を $\bar{E}$ と書き，E の**閉包**という．また $\bar{E}=E$ なる集合 E を**閉集合**という．このとき

定理 2. $x\in\bar{E}$ なることと，x の任意の近傍 $U(x)$ が E と交わること (すなわち $U(x)\frown E\neq\phi$) とは同等である．

証明. $x\in\bar{E}$ とすると，$x\in E$ または $x\in E'$ の少なくとも一方が成立する．x の任意の近傍 $U(x)$ をとるとき，$x\in E$ ならば $U(x)\frown E\ni x$ だから $U(x)\frown E\neq\phi$，また $x\in E'$ ならば集積点の定義により $U(x)\frown E\neq\phi$ である．逆に，x の任意の近傍 $U(x)$ が E と交わるとき，もしも $x\notin E$ とすると，$U(x)$ が x 以外の E の点を含むことになるから，定理1により $x\in E'$ となる．だから $x\in E\smile E'=\bar{E}$.

定理 3. i) $E\subset\bar{E}$, ii) $\bar{\bar{E}}=\bar{E}$, iii) $\overline{E_1\smile E_2}=\bar{E}_1\smile\bar{E}_2$, iv) $E_1\subset E_2$ ならば $\bar{E}_1\subset\bar{E}_2$, v) 空集合 ϕ に対しては $\bar{\phi}=\phi$.

---

*) すべての座標 x_ν が有理数であるような点 $(x_1, \cdots, x_N)$ を**有理点**という．

証明. i) と v) は定義から明らかである．iv) も定理 2 から容易にわかる．ii) の証明. $\bar{\bar{E}}\supset\bar{E}$ は i) によって明らかだから，$\bar{\bar{E}}\subset\bar{E}$ を示せばよい．$x\in\bar{\bar{E}}$ とすると，任意の $\varepsilon>0$ に対して定理 2 により $U(x,\ \varepsilon/2)\cap\bar{E}\neq\phi$ だから，$U(x,\ \varepsilon/2)\cap\bar{E}\ni y$ なる点 y が存在する．$y\in\bar{E}$ だから，上と同様に $U(y,\ \varepsilon/2)\cap E\ni z$ なる点 z がある．このとき

$$\rho(x,\ z)\leqq\rho(x,\ y)+\rho(y,\ z)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

だから $z\in U(x,\ \varepsilon)\cap E$，従って $U(x,\ \varepsilon)\cap E\neq\phi$ となり $x\in\bar{E}$ である．iii) の証明. $x\in\overline{E_1\cup E_2}$ ならば，x の任意の近傍 $U(x)$ に対して $U(x)\cap(E_1\cup E_2)$ が無限集合，従って $U(x)\cap E_1$ と $U(x)\cap E_2$ の少なくも一方は無限集合となり $x\in\bar{E}_1$ または $x\in\bar{E}_2$; すなわち $x\in\bar{E}_1\cup\bar{E}_2$. だから $\overline{E_1\cup E_2}\subset\bar{E}_1\cup\bar{E}_2$. また iv) により $\bar{E}_1\subset\overline{E_1\cup E_2}$, $\bar{E}_2\subset\overline{E_1\cup E_2}$ だから，$\bar{E}_1\cup\bar{E}_2\subset\overline{E_1\cup E_2}$. よって $\overline{E_1\cup E_2}=\bar{E}_1\cup\bar{E}_2$ となる．

定理 4. i) F_1, F_2 が閉集合ならば $F_1\cup F_2$ は閉集合である．

ii) F_λ (λ は任意に与えられた集合を動く*)) が閉集合ならば $\bigcap_\lambda F_\lambda$ は閉集合である．

iii) ϕ, R^N は閉集合である．

証明. iii) は定義と定理 3 の v) とから明らかである．i) の証明. 閉集合の定義と定理 3 の iii) により $\overline{F_1\cup F_2}=\bar{F}_1\cup\bar{F}_2=F_1\cup F_2$ だから $F_1\cup F_2$ は閉集合である．ii) の証明. $F=\bigcap_\lambda F_\lambda$ とおき，$x\in\bar{F}$ とすると，x の任意の近傍 $U(x)$ に対して $U(x)\cap F\neq\phi$ だからすべての λ に対して $U(x)\cap F_\lambda\neq\phi$ となる．だから $x\in F_\lambda$ がすべての λ で成立し，$x\in\bigcap_\lambda F_\lambda=F$ となるから，$\bar{F}\subset F$ である．一方定理 3 の i) により $\bar{F}\supset F$ であるから，$\bar{F}=F$ となり F は閉集合である．(証明終)

次に集合 E の内点，外点，境界点を定義しよう．点 x が E の**内点**であるとは，x の十分小さい近傍 $U(x)$ をとれば $U(x)\subset E$ となることである．また，x が E の**外点**であるとは，x の十分小さい近傍 $U(x)$ をとれば $U(x)\cap E=\phi$ となることである．従って E の外点は $E^c(=R^N-E)$ の内点である．E の内点でも外点でもない点を E の**境界点**という；すなわち x が E の境界点であるとは，x の任意の近傍 $U(x)$ が，E とも E^c とも交わることである．E の内点の全体を E° と書くことがある．

集合 E のすべての点が E の内点であるとき，すなわち $E^\circ=E$ のとき，E を**開集合**という．

例. R^2 において

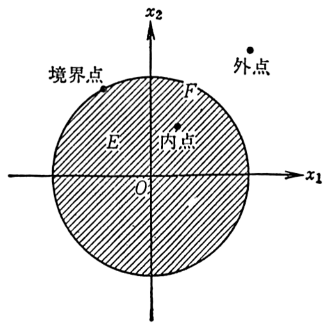
$$E=\{(x_1,\ x_2);\ x_1{}^2+x_2{}^2<1\},$$

---

*) 有限集合でも無限集合 (可算無限集合とはかぎらない) でもよい．次の定理 5 の iii) においても同様である．

$$F=\{(x_1,\ x_2)\ ;\ x_1{}^2+x_2{}^2\leqq 1\}$$

とすると，$x_1{}^2+x_2{}^2<1$ なる点 $(x_1,\ x_2)$ は E の内点でも F の内点でもあり，$x_1{}^2+x_2{}^2>1$ なる点 $(x_1,\ x_2)$ は E の外点でも F の外点でもある．また $x_1{}^2+x_2{}^2=1$ なる点 $(x_1,\ x_2)$ は E の境界点でも F の境界点でもある．このとき $E^\circ=F^\circ=E$, $\bar{E}=\bar{F}=F$ であるから，E は開集合であり，F は閉集合である．



定理 5. i)　G_1, G_2 が開集合ならば，$G_1\cap G_2$ は開集合である．

ii)　G_λ （λ は任意に与えられた集合を動く）が開集合ならば $\bigcup_\lambda G_\lambda$ は開集合である．

iii)　ϕ, R^N は開集合である．

証明. iii) は定義から明らかである ($\phi^\circ=\phi$ である)．i) の証明．$x\in G_1\cap G_2$ とすると，$U(x,\ \varepsilon_1)\subset G_1$ となる $\varepsilon_1>0$ と $U(x,\ \varepsilon_2)\subset G_2$ となる $\varepsilon_2>0$ とが存在する．だから $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\}$ とおくと $U(x,\ \varepsilon)\subset G_1\cap G_2$．だから $G_1\cap G_2$ は開集合である．ii) の証明．$x\in\bigcup_\lambda G_\lambda$ とすると，$x\in G_\lambda$ なる λ があるから，$U(x)\subset G_\lambda$ なる x の近傍 $U(x)$ が存在し，明らかに $U(x)\subset\bigcup_\lambda G_\lambda$ である．だから $\bigcup_\lambda G_\lambda$ は開集合である．

注意 1. 定理4の i) により，任意の有限個の閉集合の和は閉集合であるが，無限個の閉集合の和は閉集合とはかぎらない．例えば，R^1 において $F_n=[1/n,\ 1]$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ は閉集合であるが，$\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n=(0,\ 1]$ は 0 を含まないから閉集合ではない．同様に定理5の i) により，任意の有限個の開集合の交わりは開集合であるが，無限個の開集合の交わりは開集合とはかぎらない．例えば，R^1 において $G_n=(0,\ 1+1/n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ は開集合であるが，$\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n=(0,\ 1]$ は開集合ではない（1 は内点でない）．

注意 2. 閉集合と開集合とは，いわゆる‘反対語’ではない．例えば R^1 における区間 (0, 1] は閉集合でも開集合でもないし，（定理4と5に述べたように）ϕ と R^N 全体とは閉集合でも開集合でもある．*) しかし，閉集合と開集合との間には次の関係がある．

定理 6. i)　閉集合 F の補集合 F^c は開集合である．

ii)　開集合 G の補集合 G^c は閉集合である．

---

*)　R^N においては，閉集合で同時に開集合であるものは ϕ と R^N 以外には存在しないことが証明できるのであるが，ここでは省略する．なお，一般の距離空間では，閉集合で同時に開集合になる集合の例はいくらでも作れる．

証明．i) $x\in F^c$ とすると $x\notin F=\bar{F}$ だから，定理2により F と交わらないような x の近傍 $U(x)$ が存在する．従って $U(x)\subset F^c$ となり，F^c は開集合である．ii) $x\in\overline{G^c}$ とすると，定理2により x の任意の近傍 $U(x)$ が G^c と交わるから，x は G の内点ではない．従って $x\notin G^\circ=G$, すなわち $x\in G^c$ となり，$\overline{G^c}\subset G^c$ となるから，G^c は閉集合である．(証明終)

R^N の原点を中心とする半径 n の球の内部を S_n と書くことにする ($n=1, 2, \cdots$). 集合 $E\subset R^N$ に対して，$E\subset S_n$ なる n が存在するとき，E は**有界**であるという．また，$\bar{E}=R^N$ なる集合 E は，R^N で**稠密**であるという．例えば，すべての有理点の集合は R^N で稠密である．

問 1. F が閉集合，G が開集合ならば，$F-G$ は閉集合，$G-F$ は開集合である．
($F-G=F\frown G^c$, $G-F=G\frown F^c$ として定理4，5，6を使えばよい．)

問 2. S_n を上に述べたとおりとする．各 n に対して F_n が閉集合であって $F_n\subset S_n{}^c$ ならば，$F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ は (閉集合の<u>無限個</u> の和であるけれども) 閉集合である．

最後に連続函数の定義を述べておこう．R^N の中の集合 E で定義された函数 $f(x)$ (実数値でも複素数値でもよい) が E で**連続**であるとは，任意の点 $x\in E$ と任意の $\varepsilon>0$ に対して，適当な $\delta>0$ をとれば*)

$$y\in U(x,\ \delta)\frown E \text{ なるかぎり } |f(y)-f(x)|<\varepsilon$$

となることである．

定理 7. $f(x)$, $g(x)$ が E で連続ならば，i) $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$ は E で連続である；ii) $f(x)/g(x)$ は $E_1=\{x;\ x\in E,\ g(x)\neq 0\}$ で連続である；iii) 特に $f(x)$, $g(x)$ が実数値なら $\max\{f(x),\ g(x)\}$, $\min\{f(x),\ g(x)\}$ は E で連続である．

証明．任意の $x\in E$ と任意の $\varepsilon>0$ とをとる．i) $f(x)\pm g(x)$ については

$$y\in U(x,\ \delta_1)\frown E \text{ ならば } |f(y)-f(x)|<\varepsilon/2,$$
$$y\in U(x,\ \delta_2)\frown E \text{ ならば } |g(y)-g(x)|<\varepsilon/2$$

なる δ_1, $\delta_2>0$ をとって $\delta=\min\{\delta_1,\ \delta_2\}$ とすれば，$y\in U(x,\ \delta)\frown E$ なるかぎり

$$|\{f(y)\pm g(y)\}-\{f(x)\pm g(x)\}|\leqq|f(y)-f(x)|+|g(y)-g(x)|$$
$$<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon \quad \text{(複号同順)}.$$

また $f(x)g(x)$ については，

$$y\in U(x,\ \delta_1)\frown E \text{ ならば } |f(y)-f(x)|<\varepsilon/\{2|g(x)|+1\},$$
$$y\in U(x,\ \delta_2)\frown E \text{ ならば } |g(y)-g(x)|<\varepsilon/\{2|f(x)|+2\varepsilon\}$$

---

*) δ は点 $x(\in E)$ と正数 ε とに関係して定まる．

なる δ_1, $\delta_2>0$ をとって $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$ とすれば, $y\in U(x, \delta)$ なるかぎり

$$|f(y)|\leqq|f(x)|+|f(y)-f(x)|<|f(x)|+\varepsilon$$

だから

$$|f(y)g(y)-f(x)g(x)|\leqq|f(y)||g(y)-g(x)|+|f(y)-f(x)||g(x)|$$
$$< \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

ii), iii) はそれぞれ i) の $f(x)g(x)$, $f(x)\pm g(x)$ の場合と同じ方法で証明できる (読者諸氏において試みられたい).

次の事実は, 定理というほどでもないが, 上の連続性の定義を使う練習用として (および本文 §11 で引用するために) 証明を与えておく.

定理 8. どの二つも互いに交わらない有限個の閉集合 $F_1, \cdots, F_n$ があるとし, $F=F_1+\cdots+F_n$ とする. $f(x)$ が F の上で定義された函数で, 各 F_k で連続ならば, $f(x)$ は F で連続である.

証明. 任意の $x\in F$ はどれか一つ, かつただ一つの F_k に含まれるから, 例えば $x\in F_1$ とする. $f(x)$ は F_1 で連続であるから, 任意の $\varepsilon>0$ に対して,

$$y\in U(x, \delta_1)\frown F_1 \text{ ならば } |f(y)-f(x)|<\varepsilon$$

となるような $\delta_1>0$ が存在する. また, $F_2+\cdots+F_n$ は x を含まない閉集合であるから, $U(x, \delta_2)\frown(F_2+\cdots+F_n)=\phi$ なる $\delta_2>0$ が存在する. $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$ とすると, $U(x, \delta)\frown(F_2+\cdots+F_n)=\phi$ だから, $y\in U(x, \delta)\frown F\,(=U(x, \delta)\frown F_1)$ ならば $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$ となる. だから $f(x)$ は F で連続である. (証明終)

次の問 3 も連続函数の定義から容易に証明できる:

問 3. $f(x)$ が集合 $E(\subset R^N)$ の上で連続な実数値函数ならば, 任意の実数 α に対して, 適当な開集合 G_α をとって $\{x;\, x\in E,\ f(x)<\alpha\}=E\frown G_\alpha$ となるようにすることができる.

§2. 被覆定理. この § では, Euclid 空間における点集合論で最も重要な Borel-Lebesgue (ボレル-ルベーグ) の被覆定理*) と Lindelöf (リンデレーフ) の被覆定理について述べる. まず

補助定理 1. R^N における有界な閉区間の列 $\{K_n\}$:

$$K_n=[a_{n1}, b_{n1}]\times\cdots\times[a_{nN}, b_{nN}] \qquad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

が単調減少: $K_0\supset K_1\supset\cdots\supset K_n\supset\cdots$ ならば, $\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n\neq\phi$ である. 特に

*) Heine-Borel (ハイネ-ボレル) の被覆定理ともいう.

(5)
$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqq\nu\leqq N} (b_{n\nu}-a_{n\nu})=0$$

ならば, $\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$ はただ一つの点からなる.

証明. $\{K_n\}$ が単調減少だから, 各 ν $(1\leqq\nu\leqq N)$ に対して

$$a_{0\nu}\leqq a_{1\nu}\leqq\cdots\leqq a_{n\nu}\leqq\cdots\leqq b_{n\nu}\leqq\cdots\leqq b_{1\nu}\leqq b_{0\nu}.$$

すなわち数列 $\{a_{n\nu};\ n=0,1,2,\cdots\}$ は単調増加で上に有界（上界 $b_{0\nu}$ がある）だから, $a_\nu=\lim_{n\to\infty} a_{n\nu}$ が存在する.*) また任意の n を固定するとき

$$m>n \text{ ならば } a_{n\nu}\leqq a_{m\nu}\,(<b_{m\nu})\leqq b_{n\nu}$$

だから, $m\to\infty$ として

$$a_{n\nu}\leqq a_\nu\leqq b_{n\nu},\quad \text{すなわち}\quad a_\nu\in[a_{n\nu},\ b_{n\nu}].$$

以上のことがすべての $\nu\,(1\leqq\nu\leqq N)$ についていえるから, $x=(a_1,\ \cdots,\ a_N)$ なる点は K_n に属する. ここで n も任意だから $x\in\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$, すなわち $\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n\neq\phi$. 別に, 点 $x'=(a',\ \cdots,\ a_N')$ が $\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$ に属するとすると, すべての n, ν に対して $a_\nu'\in[a_{n\nu},\ b_{n\nu}]$ だから

$$a_{n\nu}\leqq\begin{Bmatrix}a_\nu\\ a_\nu'\end{Bmatrix}\leqq b_{n\nu}\quad \text{従って}\quad |a_\nu-a_\nu'|\leqq b_{n\nu}-a_{n\nu}.$$

だから, 仮定 (5) がある場合には, 上の式で $n\to\infty$ として $a_\nu=a_\nu'$ $(1\leqq\nu\leqq N)$ が得られ, $x=x'$ となる. すなわち $\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$ はただ一点からなる.

定理 1. (**Borel-Lebesgue の被覆定理**). E を R^N の中の有界閉集合とする. R^N の中の開集合の系 $\{G_\lambda\}$ があって

(6)
$$E\subset\bigcup_\lambda G_\lambda \quad \text{（このことを‘開集合系 } \{G_\lambda\} \text{ は } E \text{ を掩う’という）}$$

となるならば, $\{G_\lambda\}$ の中の有限個のものだけで E を掩うことができる, すなわち適当な $G_{\lambda_1},\ \cdots,\ G_{\lambda_n}$ をとれば

$$E\subset\bigcup_{k=1}^{n} G_{\lambda_k}$$

となる.

証明. (第一段) E が閉立方体**)である場合. E がどのような有限個の G_λ でも掩われないと仮定しよう.

---

*) 三村征雄編, 大学演習微分積分学 (裳華房) 8 頁, 定理 5.

**) N 次元の立方体の内部と周囲とを合せたもの（1 次元なら閉区間, 2 次元なら閉正方形）; 従ってそれは有界な (N 次元の) 閉区間である.

$$E=K_0=[a_1,\ b_1]\times\cdots\times[a_N,\ b_N]$$

とし，その一辺の長さを l とする．各 ν に対して区間 $[a_\nu,\ b_\nu]$ の二等分点を c_ν とし，R^N の中の N 個の超平面

$$x_\nu=c_\nu \qquad (\nu=1,\ \cdots,\ N)$$

を考えると，K_0 はこれらの超平面によって，一辺の長さが $l/2$ の，2^N 個の閉立方体（境界面だけを共有する）$K_{01},\ \cdots,\ K_{02^N}$ に分けられる．$K_0(=E)$ が有限個の G_λ では掩われないから，$K_{01},\ \cdots,\ K_{02^N}$ のうちの少なくも一つは有限個の G_λ では掩われない．だから，そのような K_{0j} の一つを K_1 とする．次に K_1 に対して上と同様の考察をすると，K_1 に含まれて一辺の長さが $l/2^2$ の閉立方体 K_2 で，有限個の G_λ では掩われないものが存在する．この操作をかぎりなくくりかえすと，有限個の G_λ では掩われないような閉立方体 K_n の単調減少列が得られ，K_n の一辺の長さは $l/2^n$ であるから，補助定理1の仮定が（(5) の式も含めて）満たされている．だから $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ は一点 x である．ところが仮定 (6) により $x\in G_\lambda$ なる開集合 G_λ があるから，$U(x,\ \varepsilon)\subset G_\lambda$ なる $\varepsilon>0$ が存在する．だから $\sqrt{N}\,l/2^n<\varepsilon$ なる n をとると，これに対する K_n は $K_n\subset U(x,\ \varepsilon)\subset G_\lambda$ *) となり，K_n はただ一つの G_λ に含まれることになって矛盾である．だから最初の仮定がいけなかったわけで，E は適当な有限個の G_λ で掩われなければならない．

（第二段）E が任意の有界閉集合の場合．まず E が有界なことにより，十分大きい閉立方体 K をとれば $E\subset K$ となる．§2 の定理6により $G_0=E^c$ は開集合であり，仮定 (6) により

$$K\subset R^N=E\cup E^c\subset\Bigl(\bigcup_{\lambda} G_\lambda\Bigr)\cup G_0;$$

すなわち閉立方体 K が $\{G_\lambda\}$ に G_0 を合わせた開集合系によって掩われたことになる．だから第一段によって，適当な有限個の $G_{\lambda_1},\ \cdots,\ G_{\lambda_n}$ をとれば

$$K\subset\Bigl(\bigcup_{k=1}^{n} G_{\lambda_k}\Bigr)\cup G_0$$

この両辺と E との交わりを考えれば，$E\cap K=E,\ E\cap G_0=E\cap E^c=\phi$ なることにより

$$E\subset\bigcup_{k=1}^{n} G_{\lambda_k}$$

となる．（証明終）

*) 一辺が $l/2^n$ の N 次元立方体 K_n の最も長い‘対角線’の長さは $\sqrt{N}\,l/2^n$ だから，$y\in K_n$ ならば $\rho(x,\ y)\leqq\sqrt{N}\,l/2^n<\varepsilon$．だから $K_n\subset U(x,\ \varepsilon)$．

注意. この定理の内容を，単に'有界な閉集合は有限個の開集合で掩われる'というように漠然と考えてはいけない．それだけのことなら，R^N の中の任意の有界集合は，例えば原点を中心とする十分大きい球の内部（それは開集合である）に入るから，ただ1個の開集合で掩われる．上の定理は，与えられた開集合の系 $\{G_\lambda\}$ がどのようなものであっても（各 G_λ がどんなに小さいものばかりであっても！)，それら全体で有界閉集合 E を掩っているならば，その中の適当な有限個で E を掩うことができることを主張するものである．この定理の意味は最初はわかりにくいかも知れないが，使い方（例えば後述の定理3の証明，本文中の定理 4. 2 の証明など）を見れば次第にわかってくると思う．

次に Lindelöf の被覆定理を証明する準備として

補助定理 2. R^N の中のすべての有理点の集合 Q は可算無限集合である.

証明. すべての有理数の集合は可算無限集合（本文 §2）だから，それを

$$\{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$$

とすると，R^N の有理点 x は $x=(r_{n_1}, \cdots, r_{n_N})$ と表わされる．今

$$Q_m=\{x=(r_{n_1}, \cdots, r_{n_N});\ n_1+\cdots+n_N=m\}$$

とおくと $Q=\bigcup_{m=N}^{\infty} Q_m$ である．ところが Q_m に属する点の個数は，和が m になるような自然数の N 項系列 $\{n_1, \cdots, n_N\}$ の数と同じであるから，それは有限である．すなわち各 Q_m は有限集合である．だから Q は可算無限集合である．

補助定理 3. R^N の中のすべての有理点の集合を $Q=\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ （補助定理2参照）とし，またすべての正の有理数の集合を $\{r_1, r_2, \cdots, r_m, \cdots\}$ とする．G を R^N の中の開集合とし，$U(x_n, r_m)$ なる形の集合で G に含まれるものの全体（それらは，自然数の2項系列 $\{n, m\}$ の全体の部分集合であるから，高々可算無限集合である）を $\{V_1, V_2, \cdots, V_k \cdots\}$ とすると，$G=\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$ である．

証明. 任意の点 $x\in G$ に対して $U(x, \delta)\subset G$ なる $\delta>0$ が存在する．すべての有理点の集合 Q は R^N で稠密であるから，$x_n\in U(x, \delta/3)$ なる $x_n\in Q$ が存在し，また $\delta/3<r_m<2\delta/3$ なる有理数 r_m が存在する．このとき $U(x_n, r_m)\subset U(x, \delta/3+r_m)\subset U(x, \delta)\subset G$ だから，$U(x_n, r_m)$ は或る一つの V_k になっている．しかも $\rho(x, x_n)<\delta/3<r_m$ だから $x\in U(x_n, r_m)=V_k$. よって $G\subset\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$ である．一方各 V_k は G に含まれるから $\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k\subset G$. 以上により $G=\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$ となる．

定理 2 (Lindelöf の被覆定理). E を R^N の中の任意の集合とする．R^N の中の開集合の系 $\{G_\lambda\}$ があって

(7) $$E \subset \bigcup_{\lambda} G_\lambda$$

となるならば，$\{G_\lambda\}$ の中の適当な高々可算無限個の G_{λ_k} $(k=1, 2, \cdots)$ で E を掩うことができる：$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_{\lambda_k}$.

証明. 各 G_λ は補助定理 3 により

$$G_\lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_{\lambda_k}, \quad \text{各} V_{\lambda_k} \text{は補助定理 3 に述べた} U(x_n, r_m) \text{なる形},$$

と書ける．λ が G_λ のすべての添え字にわたり，k がすべての自然数にわたるときの V_{λ_k} のうちで，相異なるものの全体は高々可算無限個であるから，それらをあらためて V_1, V_2, $\cdots$, V_k, $\cdots$ と書くと $E \subset \bigcup_{\lambda} G_\lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$ となる．各 V_k は少なくも一つの G_λ に含まれるから，その一つを G_{λ_k} とすれば

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_{\lambda_k}$$

となり，定理 2 が証明せられた．

次の定理 3 は定理 1 の一つの応用である．まず任意の点 $x \in R^N$ に対して，R^N の原点から x へのベクトルを同じ文字 x で表わすことにし，ベクトル x の長さを $|x|$ と書く．また集合 $E \subset R^N$ をベクトル x だけ‘平行移動’したものを $[E+x]$ と書く：

$$[E+x] = \{y+x\,;\, y \in E\} \qquad (+ \text{ はベクトルとしての和}).$$

このとき

定理 3. F が有界閉集合，G が開集合で $F \subset G$ ならば，適当な $\delta > 0$ が存在して，$|x| < \delta$ なるかぎり $[F+x] \subset G$ となる．

証明. 任意の点 $y \in F$ に対して，$y \in G$ だから $U(y, \varepsilon_y) \subset G$ なる $\varepsilon_y > 0$ が存在する．そして $F \subset \bigcup_{y \in F} U\left(y, \dfrac{\varepsilon_y}{2}\right)$ であって，各 $U\left(y, \dfrac{\varepsilon_y}{2}\right)$ は開集合だから，定理 1 によって，適当な有限個の $y_1, \cdots, y_n \in F$ が存在して

$$F \subset \bigcup_{k=1}^{n} U\left(y_k, \frac{\varepsilon_{y_k}}{2}\right)$$

となる．すなわち任意の $y \in F$ は少なくも一つの $U(y_k, \varepsilon_{y_k}/2)$ に属するから，任意の $z \notin G$ に対して

$$\rho(z, y) \geqq \rho(z, y_k) - \rho(y, y_k) > \varepsilon_{y_k} - \varepsilon_{y_k}/2 = \varepsilon_{y_k}/2.$$

だから，$\delta = \dfrac{1}{2} \min \{\varepsilon_{y_1}, \cdots, \varepsilon_{y_k}\}$ とおくと，$|x| < \delta$ ならば任意の $y \in F$ に対して $y+x \in G$, すなわち $[F+x] \subset G$ となる．(証明終)

次の定理は §15 の最後に小活字で書いた反例の構成にだけ使われるものである．前の

補助定理3の応用であるが，集合の濃度の概念も必要であるから，集合論に関する事項については巻末にあげた書物 [1]，[2] などを参照せられたい．

定理 4. R^N の中のすべての閉集合の族を $\mathfrak{C}$，すべての開集合の族を $\mathfrak{O}$ とすると，$\overline{\overline{\mathfrak{C}}}=\overline{\overline{\mathfrak{O}}}=\aleph$（連続体の濃度）である，

証明．§1の定理6により，任意の $E\in\mathfrak{C}$ に $E^c\in\mathfrak{O}$ を対応させると，$\mathfrak{C}$ と $\mathfrak{O}$ との間に一対一の対応が成立するから $\overline{\overline{\mathfrak{C}}}=\overline{\overline{\mathfrak{O}}}$ である．よって $\overline{\overline{\mathfrak{O}}}=\aleph$ を示せばよい．任意の $G\in\mathfrak{O}$ は補助定理3により

$$G=\bigcup_{k=1}^{\infty} U(x_{n_k},\ r_{m_k})\quad (x_n \text{ は有理点，} r_m \text{ は正の有理数})$$

と書けるから，G に対して自然数の組 $(n,\ m)$ の列 $\{(n_k,\ m_k);\ k=1,\ 2,\ \cdots\}$ が対応する．そして相異なる $G,\ G'\in\mathfrak{O}$ に対しては相異なる列 $\{(n_k,\ m_k)\}$，$\{(n_k',\ m_k')\}$ が対応する（∵ すべての k に対して $n_k=n_k'$，$m_k=m_k'$ ならば

$$G=\bigcup_{k=1}^{\infty} U(x_{n_k}\ r_{m_k})=\bigcup_{k=1}^{\infty} U(x_{n_k'},\ r_{m_k'})=G'$$

となる）．自然数の2項系列の全体（それは可算集合である）から，その無限列を選ぶ選び方の全体は，濃度$\aleph$の集合をなし，上の議論により，$\mathfrak{O}$ はそのような選び方の全体の部分集合と対等になる．だから $\overline{\overline{\mathfrak{O}}}\leqq\aleph$ である．一方，任意の正数 α に対して，原点を中心とする半径 α の球の内部は開集合であるから，$\overline{\overline{\mathfrak{O}}}\geqq\overline{\overline{\{\alpha;\ \alpha>0\}}}=\aleph$．だから $\overline{\overline{\mathfrak{O}}}=\aleph$ である．（証明終）

以下の諸定理は，本文中で直接引用はしないが，Borel-Lebesgue の被覆定理に関連した重要な定理である．定理5，定理6はそれぞれ **Bolzano-Weierstrass**（ボルツァノ-ワイエルストラス）**の定理**，**Cantor**（カントル）**の共通部分定理** と呼ばれる．

定理 5. R^N の中の有界な無限集合 E は必ず集積点をもつ．

証明の方針．$E\subset K_0$ なる閉立方体 K_0 をとり，定理1の第一段のように K_0 を 2^N 個の閉立方体 K_{01}，K_{02}，…，$K_{0,2^N}$ に分けると，少なくも一つの K_{0j} に対して $E\cap K_{0j}$ が無限集合になる．それを K_1 とし，定理1の証明と同様の論法を続ければよい．くわしくは演習問題とする．

問 1. 上の定理5を証明せよ．

定理 6. $\{F_n\}$ が R^N の中の有界閉集合の単調減少列ならば $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\neq\phi$.

これは次の定理の特別の場合である．

定理 6′. E が R^N の中の有界閉集合とする．R^N の中の閉集合の系 $\{F_\lambda\}$ があって，その中の任意の有限個の F_{λ_1}, …, F_{λ_n} に対して $E\cap F_{\lambda_1}\cap\cdots\cap F_{\lambda_n}\neq\phi$ ならば，$E\cap\left(\bigcap_\lambda F_\lambda\right)\neq\phi$ である．

略証．もしも $F\cap\left(\bigcap_\lambda F_\lambda\right)=\phi$ とすると，$E\subset\left(\bigcap_\lambda F_\lambda\right)^c=\bigcup_\lambda F_\lambda{}^c$ であって，各 $F_\lambda{}^c$ は開集合だから，定理1によって $E\subset\bigcup_{k=1}^{n} F_{\lambda_k}{}^c$ なる有限個の F_{λ_k} が存在する．従って

$E \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n} F_{\lambda_k}\right) = E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} F_{\lambda_k}{}^c\right) = \phi$ となり仮定に反する．（証明終）

一般に集合 E が定理1の性質（それは定理 6′ の性質と同等である）をもつとき，E はコンパクトであるという．定理1は，Euclid 空間 R^N においては有界閉集合はコンパクトであることを，主張しているわけである．*) 逆に

定理 7. R^N においては，コンパクト集合は有界閉集合である．

証明は次の方針でやればよいから，演習問題としておく．E をコンパクト集合とし，S_n を§1 で述べたとおりとすると，$E \subset R^N = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ だから $E \subset S_n$ なる n がある．また $x \notin E$ とすると，$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U(x,\ 1/n)}^c$ だから $E \subset U(x,\ 1/n)^c$ なる n があり，従って $x \notin \bar{E}$ がいえて E は閉集合となる．

問 2. 上の定理7の完全な証明を与えよ．

なお，コンパクト集合の上の連続函数の性質については，たとえば，一松 信著，解析学序説上巻（裳華房），第5章 §3 を見られたい．（そこには R^1 の場合に述べられているが，証明はすべて R^N にも通用するように書かれている．）

§3. 集合の距離.

R^N の中の点 x と集合 E との距離 $\rho(x, E)$ は

$$\rho(x,\ E) = \inf_{y \in E} \rho(x,\ y) \tag{8}$$

によって定義される．また二つの集合 $A, B \subset R^N$ の距離 $\rho(A,\ B)$ は

$$\rho(A,\ B) = \inf_{x \in A,\, y \in B} \rho(x,\ y) \tag{8′}$$

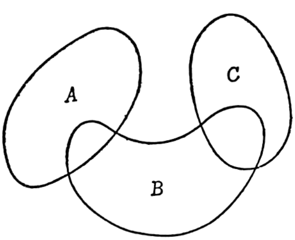
によって定義される．(8′) において二つの集合の一方が一点である場合は (8) になり，さらに両方とも一点であれば，普通の‘二点の距離’になる．

(8′) で定義された集合の距離の性質を，付録の最初に述べた二点 $x,\ y$ の距離の性質 (1), (2), (3) と比較してみよう：

(1′) $\rho(A,\ B) \geqq 0$ であり，$\bar{A} \cap \bar{B} \neq \phi$ ならば $\rho(A,\ B) = 0$ であるが，$\bar{A} \cap \bar{B} = \phi$ でも $\rho(A,\ B) > 0$ とはかぎらない．（例えば平面 R^2 の中の双曲線とその漸近線を考えよ．なお後述の定理5を見よ．）

(2′) $\rho(A,\ B) = \rho(B,\ A)$（明らか）．

(3′) $\rho(A,\ B) + \rho(B,\ C) \geqq \rho(A,\ C)$ は成立しない（右図参照）．



*) 一般の距離空間では，有界閉集合は必ずしもコンパクトではない；しかし逆（定理7）は任意の距離空間で成立する．

次に，(8) で定義される点と集合との距離に関する二三の定理を述べよう．

定理 1. $\rho(x, E)=0$ なるための必要十分条件は，$x\in\bar{E}$ なることである．

証明．(必要) $x\notin\bar{E}$ とすると，§1 の定理2により $U(x, \varepsilon)\frown E=\phi$ なる $\varepsilon>0$ が存在する．だから任意の $y\in E$ に対して $\rho(x, y)\geqq\varepsilon$，従って $\rho(x, E)\geqq\varepsilon>0$ となる．

(十分) $\rho(x, E)=\delta>0$ とすると，任意の $y\in E$ に対して $\rho(x, y)\geqq\delta$ だから $U(x, \delta)\frown E=\phi$．だから §1 の定理2により $x\notin\bar{E}$ となる．

定理 2. 集合 $E\subset R^N$ を固定するとき，$f(x)=\rho(x, E)$ は R^N の上の連続函数である．

証明．任意の $x, y\in R^N$ と任意の $z\in E$ に対して $f(x)\leqq\rho(x, z)\leqq\rho(x, y)+\rho(y, z)$ だから，x と y を固定して z が E 全体を動いたときの下限をとれば

$$f(x)\leqq\rho(x, y)+f(y),\quad \text{すなわち}\quad f(x)-f(y)\leqq\rho(x, y).$$

x と y とを入れかえて，同様の論法により $f(y)-f(x)\leqq\rho(x, y)$ が得られるから，$|f(y)-f(x)|\leqq\rho(x, y)$ となる．だから $f(x)$ は R^N の上で連続である．

この定理の一つの応用として，

定理 3. R^N の中の任意の閉集合 F に対して，開集合の単調減少列 $\{G_n\}$ で $F=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$ となるものが存在する；特に F が有界ならば，G_n としては有界なものばかりをとれる．

証明．$f(x)=\rho(x, F)$ は定理2によって R^N の上で連続だから，$G_n=\left\{x;\ f(x)<\dfrac{1}{n}\right\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ は開集合（§1 問3において $E=R^N$ の場合）であり，n について単調減少である．そして定理1により $\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n=\{x;\ f(x)=0\}=\bar{F}=F$ である．特に F が有界ならば，上のようにして作った G_n は明らかに有界である．

定理 4. R^N の中の任意の開集合 G に対して，(有界な) 閉集合の単調増加列 $\{F_n\}$ で $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ となるものが存在する．

証明は，F_n の有界性を要求しない場合は，定理3とまったく同じ方法でできる；この F_n と $\bar{S}_n$ (S_n は §1 で述べたもの) との交わりを F_n' とすると，$\{F_n'\}$ が求めるものである．くわしい証明は演習問題とする．

問 1. 定理4を証明せよ．

例 1. F_0, F_1 を互いに交わらない閉集合とし

$$f(x)=\frac{\rho(x, F_0)}{\rho(x, F_0)+\rho(x, F_1)}$$

とおく．$\rho(x, F_0)$ と $\rho(x, F_1)$ とは同時に0になることはない ($\because F_0\frown F_1=\phi$) から，上の式の分母はいつも正である．だからこの§の定理2と §1 の定理7により，$f(x)$ は

R^N で連続である．そして定理1により，$f(x)$ は

$$\begin{cases} x\in F_0 \text{ ならば } f(x)=0,\ x\in F_1 \text{ ならば } f(x)=1, \\ \text{その他の点では } 0<f(x)<1 \end{cases}$$

なる値をとる．

例 2. G が開集合のとき，$f_n(x)=\min\{n\cdot\rho(x,\ G^c),\ 1\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ は R^N の上の連続函数であって

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\chi_G(x) \quad (\chi_G \text{ は集合 } G \text{ の定義函数}). \tag{9}$$

問 2. 上の (9) を証明せよ．

最後に，集合の距離について，

定理 5. R^N の中の集合 $A,\ B$ の一方が有界であって $\bar{A}\frown\bar{B}=\phi$ ならば，$\rho(A,\ B)>0$ である．

証明． A が有界とすると，$F=\bar{A}$ は有界閉集合，$G=(\bar{B})^c$ は開集合で $F\subset G$ だから，§2 の定理3の証明と同様にして，適当な $\delta>0$ が存在して，任意の $y\in F$ と任意の $z\in G$ に対して $\rho(z,\ y)\geqq\delta$ となる．だから $\rho(A,\ B)\geqq\rho(F,\ G^c)\geqq\delta>0$.

§4. 距離空間について． この付録の最初に，一般の距離空間の定義だけ述べておいたが，この § では，距離空間に関して本文中で引用される二・三の定理を証明しよう．まず距離空間の簡単な例をあげよう．

例 1. R^N は距離空間である（前に述べたとおり）．

例 2. 閉区間 $[0,\ 1]$ の上の連続函数の全体を C とする．$f,\ g\in C$ に対して $\rho(f,\ g)=\max_{0\leqq x\leqq 1}|f(x)-g(x)|$ とすると，C は ρ を距離として距離空間になる．

例 3. $\sum_{\nu=1}^{\infty}|\xi_\nu|^2<\infty$ なる複素数列（或いは実数列としてもよい）$x=\{\xi_\nu\}$ の全体を l^2 と書き，'スモール・エル・ツー' (small l two) と読む．l^2 に属する $x=\{\xi_\nu\}$，$y=\{\eta_\nu\}$ に対して

$$\rho(x,\ y)=\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}|\xi_\nu-\eta_\nu|^2\right\}^{1/2}$$

は有限な値である．l^2 はこの ρ を距離として距離空間になる．

上の例 2, 3 において，それぞれの ρ が前に述べた距離の条件 (1)，(2)，(3) を満たすことは，容易に験証される．l^2 の実数列の場合は，或る意味で R^N を $N\to\infty$ に拡張したものと考えてよいであろう．

前の § まで R^N において述べてきた事項のうち，§2 全体と §3 の定理5では Euclid

空間の特性が使われているが，§1 と §3（定理5を除く）の内容は距離の性質だけしか使っていないから，それらは一般の距離空間でそのまま成立する．（§1 の S_n の定義で‘原点’というところは，‘空間の中の任意に固定した一点’とすればよい．）だから §1 と §3（定理5を除く）の結果は，この § でもことわりなしに使うことにする．

距離空間 X の中の点列 $\{x_n\}$ が**基本列**或いは **Cauchy**（コーシー）**列**であるとは

$$\lim_{m,n\to\infty}\rho(x_m, x_n)=0$$

なることである．また X の中の点列 $\{x_n\}$ が X の点 x に**収束する**とは

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, x)=0$$

なることである．X の中の任意の基本列が必ず X の一点に収束するとき，X は**完備**であるという．

上の例1の R^N は完備である．なぜならば，$\{x_n\}$ が基本列（n は点の番号であって座標ではない）とすると x_n の各座標は実数の基本列をなすから，その極限値を座標にもつ点を x とすれば $\rho(x_n, x)\to 0$ $(n\to\infty)$ である．また例2の C も完備である．$\{f_n\}$ が C の中の基本列であるということは，距離 ρ の定義により，函数列 $\{f_n(x)\}$ が $[0, 1]$ で一様収束することになるから，その極限函数 $f(x)$ は C に属し $\rho(f_n, f)\to 0$ $(n\to\infty)$ となる．例3の l^2 の完備性は後に示す（定理2）．

次の二つの事は，いずれも定義から容易に証明できる．

問 1. 距離空間 X の中の集合 E が閉集合であるための必要十分条件は，E に含まれる点列 $\{x_n\}$ が点 $x(\in X)$ に収束するならば $x\in E$ となることである．

問 2. 距離空間 X の中の集合 E で定義された函数 $f(x)$ が E で連続であるための必要十分条件は，点列 $\{x_n\}\subset E$ が点 $x\in E$ に収束すれば $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$ となることである．

X が距離空間で Y がその部分集合ならば，Y も X におけると同じ距離で距離空間になる．しかし，X が完備でも Y は完備とはかぎらない．例えば $X=R^N$ とし，Y を R^N の中の有理点の全体とすると，Y は明らかに完備でない．けれども次の定理1が成立する．

定理 1. X が完備な距離空間で，Y が X の中の閉集合ならば，Y は X におけると同じ距離について完備である．

証明．距離を ρ で表わす．$\{y_n\}$ が Y の中の基本列とすると，$\rho(y_m, y_n)\to 0$ $(m, n\to\infty)$ であるから，これは X の中の基本列でもある．X は完備だから $\rho(y_n, x)\to 0$ $(n\to\infty)$ なる $x\in X$ が存在し，$x\in \bar{Y}=Y$ （$\because Y$ は閉集合）である．だから Y は完備で

ある．

定理 2. l^2 は完備である．

証明． $\{x_n\}$ を l^2 の中の基本列とする．各 x_n は

$$x_n=\{\xi_{n\nu}\}_{\nu=1,2,\cdots}$$

と表わされるから，*) $\{x_n\}$ が基本列ということは次の式で表わされる：

$$\lim_{m,n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}|\xi_{m\nu}-\xi_{n\nu}|^2=0. \tag{10}$$

従って特に，各 ν に対して $\lim_{m,n\to\infty}|\xi_{m\nu}-\xi_{n\nu}|=0$ となり，$\{\xi_{n\nu}\}_{n=1,2,\cdots}$ は複素数の基本列をなすから，$\lim_{n\to\infty}\xi_{n\nu}=\xi_\nu$ なる ξ_ν が存在する．さて任意の $\varepsilon>0$ に対して，(10) により適当な n_0 をとれば，$m, n>n_0$ なるかぎり任意の N に対して

$$\sum_{\nu=1}^{N}|\xi_{m\nu}-\xi_{n\nu}|^2<\varepsilon.$$

ここで n を固定して $m\to\infty$ とすると，$\sum_{\nu=1}^{N}|\xi_\nu-\xi_{n\nu}|^2<\varepsilon$ が任意の N に対して成立するから，次に $N\to\infty$ として

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\xi_\nu-\xi_{n\nu}|^2<\varepsilon. \tag{11}$$

ところが $|\xi_\nu|^2\leqq 2(|\xi_\nu-\xi_{n\nu}|^2+|\xi_{n\nu}|^2)$ だから，(11) と $\sum_{\nu=1}^{\infty}|\xi_{n\nu}|^2<\infty$ ($\because x_n\in l^2$) とによって $\sum_{\nu=1}^{\infty}|\xi_\nu|^2<\infty$ となり，$x=\{\xi_\nu\}$ が l^2 に属する．しかも上の結果は，任意の $\varepsilon>0$ に対して n_0 が存在して $n>n_0$ ならば (11) が成立する，すなわち $\rho(x, x_n)^2<\varepsilon$ となる，ことを表わしているから，基本列 $\{x_n\}$ は点 $x\in l^2$ に収束する．よって l^2 は完備である．(証明終)

次の定理 3 は **Baire-Hausdorff（ベール-ハウスドルフ）の定理**または単に **Baire の定理**と呼ばれ，また定理 4 も **Baire の定理**と呼ばれる．本書においては，§25 の Vitali-Hahn-Saks の定理の証明に定理 3 を使い，第 II 章の付記における例 (Dirichlet の函数が 2 階級の Baire 函数であること) を示すのに定理 3，定理 4 とその系が必要なだけであるが，この二つの定理は解析学において応用の広い定理であり，それらの証明法も距離空間における議論として典型的なものであるから，以下に完全な証明を与えておく．

定理 3. X を完備な距離空間，$F_n\,(n=1, 2, \cdots)$ をその中の閉集合とし，$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ とする．このとき，すべての F_n が内点をもたないならば $\overline{E^c}=X$ である．従って，X

*) この証明の中では $\{\ \}$ を，l^2 の中の点列を表わすのと，l^2 の一つの点である数列を表わすのと，二通りの使い方をしているが，混乱は起らないであろう．

$=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ ならば少なくも一つの閉集合 F_n が内点をもつ.

証明. X の中に $\overline{E^c}$ 属しない点 x_0 があるとすると, §1 の定理 2 により $\overline{U(x_0,\ \varepsilon_0)} \cap E^c=\phi$*) すなわち $\overline{U(x_0,\ \varepsilon_0)} \subset E$ なる $\varepsilon_0>0$ がある. F_1 は内点をもたない閉集合だから $U(x_0,\ \varepsilon_0)\cap F_1{}^c$ は空でない開集合である. だから

$$\overline{U(x_1,\ \varepsilon_1)} \subset U(x_0,\ \varepsilon_0)\cap F_1{}^c,\ \ 0<\varepsilon_1<1$$

なる点 x_1 と正数 ε_1 とが存在する. 同様にして

$$\overline{U(x_2,\ \varepsilon_2)} \subset U(x_1,\ \varepsilon_1)\cap F_2{}^c,\ \ 0<\varepsilon_2<1/2$$

なる点 x_2 と正数 ε_2 とが存在する. 以下同様にして, 点列 $\{x_n\}$ と正数列 $\{\varepsilon_n\}$ とを

$$\overline{U(x_n,\ \varepsilon_n)} \subset U(x_{n-1},\ \varepsilon_{n-1})\cap F_n{}^c,\ \ 0<\varepsilon_n<1/n\ \ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

なるように定めることができる. このとき, $n>m$ ならば $x_n \in U(x_m,\ \varepsilon_m)$ すなわち $\rho(x_n,\ x_m)<\varepsilon_m<1/m$ だから, $\{x_n\}$ は基本列をなし, X の完備性により $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n,\ x)=0$ なる点 $x \in X$ が存在する. 従ってまた, 任意の m に対して

$$\rho(x,\ x_m) \leqq \rho(x,\ x_n)+\rho(x_n,\ x_m)<\rho(x,\ x_n)+\varepsilon_m\ \ (n>m\ \text{のとき})$$

において $n\to\infty$ として $\rho(x,\ x_m)\leqq\varepsilon_m$ を得るから, $x \in \overline{U(x_m,\ \varepsilon_m)}$, 従って $x \notin F_m$ となる. だから $x \notin \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m=E$ であるが, 上の議論からまた $x \in \overline{U(x_m,\ \varepsilon_m)} \subset U(x_0,\ \varepsilon_0) \subset E$ となるから矛盾である. これで定理の前半が証明された.

後半は前半の対偶からすぐにわかる. すなわち, $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ ならば $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)^c=\phi$ だから, 前半の対偶により, 少なくも一つの F_n が内点をもつことになる.

定理 4. 距離空間 X で定義された連続函数の列 $\{f_n(x)\}$ が X の各点で有限な極限値 $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ をもてば, $f(x)$ の不連続点全体は, 内点をもたない閉集合の高々可算無限個の和集合に含まれる.

証明. まず, 正数 ε に対して

$$A_m(\varepsilon)=\{x;\ |f(x)-f_m(x)|\leqq\varepsilon\}\ (m=1,\ 2,\ \cdots),\ \ B(\varepsilon)=\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m(\varepsilon)^\circ$$

(A° は A の内点の集合) とおくとき,

(12) $$C=\bigcap_{n=1}^{\infty} B\left(\frac{1}{n}\right) \text{ が } f(x) \text{ の連続点の全体と一致する}$$

ことを証明しよう. $f(x)$ が x_0 において連続であるとする. 任意の $\varepsilon>0$ に対して, 仮

*) $U(x_0,\ \varepsilon)\cap E^c=\phi$ なる正数 ε よりも少し小さい正数を ε_0 とすればよい. このことはこの定理の証明中にくりかえして使われる.

定により $|f(x_0)-f_m(x_0)|\leqq\varepsilon$ なる m がある. $f(x)$ も $f_m(x)$ も x_0 で連続だから, x_0 の適当な近傍 $U(x_0)$ をとると

$$x\in U(x_0) \text{ ならば } |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,\ |f_m(x)-f_m(x_0)|<\varepsilon.$$

従って, $x\in U(x_0)$ ならば $|f(x)-f_m(x)|<3\varepsilon$ となり, $x\in A_m(3\varepsilon)^\circ\subset B(3\varepsilon)$. ここで ε は任意の正数だから $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}B\left(\frac{1}{n}\right)=C$ である. 逆に $x_0\in C$ とすると, 任意の $\varepsilon>0$ に対して $x_0\in B(\varepsilon)$ となるから, $x_0\in A_m(\varepsilon)^\circ$ なる m がある. だから x_0 の適当な近傍 $U_1(x_0)$ は $A_m(\varepsilon)$ に含まれる. すなわち

$$x\in U_1(x_0) \text{ ならば } |f(x)-f_m(x)|\leqq\varepsilon,\ \text{従って特に } |f(x_0)-f_m(x_0)|\leqq\varepsilon.$$

ところが $f_m(x)$ の連続性により, x_0 の適当な近傍 $U_2(x_0)$ をとると,

$$x\in U_2(x_0) \text{ ならば } |f_m(x)-f_m(x_0)|<\varepsilon.$$

従って, $U(x_0)\subset U_1(x_0)\cap U_2(x_0)$ なる $U(x_0)$ をとると,

$$x\in U(x_0) \text{ ならば } |f(x)-f(x_0)|<3\varepsilon$$

となる. だから $f(x)$ は x_0 で連続である. これで (12) が証明された.

次に, $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\cdots)$ の連続性により

$$F_m(\varepsilon)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\{x;\ |f_m(x)-f_{m+k}(x)|\leqq\varepsilon\}\ (\varepsilon>0,\ m=1,\ 2,\ \cdots)$$

は閉集合である. また $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ なる仮定により, 任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$X=\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m(\varepsilon)\ \text{従って}\ X-\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m(\varepsilon)^\circ=\bigcup_{m=1}^{\infty}\{F_m(\varepsilon)-F_m(\varepsilon)^\circ\},$$

および

$$F_m(\varepsilon)\subset A_m(\varepsilon)\ \text{従って}\ F_m(\varepsilon)^\circ\subset A_m(\varepsilon)^\circ,\ \text{従ってまた}\ \bigcup_{m=1}^{\infty}F_m(\varepsilon)^\circ\subset B(\varepsilon)$$

が得られる. (12) により $f(x)$ の不連続点の全体は $X-C$ であるが, 上の結果と de Morgan の公式 (本文 §2) によって

$$X-C=\bigcup_{n=1}^{\infty}B\left(\frac{1}{n}\right)^c\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{X-F_m\left(\frac{1}{n}\right)^\circ\right\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{F_m\left(\frac{1}{n}\right)-F_m\left(\frac{1}{n}\right)^\circ\right\}$$

となる. ところが任意の閉集合 F に対して $F-F^\circ$ は明らかに内点をもたない閉集合であるから, 上の式によって定理は証明されたことになる.

系. X が完備な距離空間ならば, X の上で定義されていて, いたる所不連続な函数は, 連続函数列の極限函数にはならない.

このことは上の二つの定理から明らかである.

例. 閉区間 [0, 1] の上の

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x \text{ が有理数のとき}) \\ 0 & (x \text{ が無理数のとき})\end{cases}$$

なる函数 $f(x)$ は，連続函数列の極限函数ではない．

補注（68頁 *）への）．$\mu(E)=\infty$ のときは，R^N の原点を中心とする半径 n の球の内部を S_n として $E_n=E\frown(S_n-S_{n-1})$ とおき，各 E_n に対して $\mu(E_n-F_n)<\varepsilon/2^n$ なる閉集合 F_n をとって $f(x)$ が F_n の上で連続であるようにすれば，$F=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ は閉集合（付録 §1，問2）であって，$f(x)$ は F の上で連続であり，$\mu(E-F)<\varepsilon$ となる．

問 題 の 解 答

I.

§2. **1.** A と $B\cap A^c(\subset A^c)$ とは交わらないから，右辺で記号 $+$ を使ってよい．x が左辺に属すれば $x\in A$ または $x\in B$ であるから，*) $x\in A$ ならば x は右辺に属し，$x\notin A$ ならば，$x\in B$ であるから $x\in B\cap A^c$ となって，x はやはり右辺に属する．逆に，x が右辺に属すれば，$x\in A$ または $x\in B\cap A^c\subset B$ だから，x は左辺に属する．よって両辺の集合は同じである．

2. $x\in A\cap B$ ならば $x\in A_i$ なる i と $x\in B_j$ なる j とが存在するから $x\in A_i\cap B_j$ $\subset$右辺．逆に，x が右辺に属すれば $x\in A_i\cap B_j$ なる i, j が存在するから，$x\in A_i\subset A$ と $x\in B_j\subset B$ とが同時に成立し $x\in A\cap B$ となる．

§3. **1.** $I=(a_1, b_1]\times\cdots\times(a_N, b_N]$, $J=(a_1', b_1']\times\cdots\times(a_N', b_N']$ とする．$(a_\nu, b_\nu]\cap(a_\nu', b_\nu']$ は $(a_\nu'', b_\nu'']$ なる形の区間または空集合である．それが空集合になるような ν があれば $I\cap J=\phi$; そのような ν がなければ $I\cap J=(a_1'', b_1'']\times\cdots\times(a_N'', b_N'']$ となる．

2. 定義から明らか．

3. $E=I_1+\cdots+I_n$, $F=J_1+\cdots+J_m$ $(I_i, J_j\in\mathfrak{I}_N)$ とすると，§2 問 2 により $E\cap F=\sum_{i,j} I_i\cap J_j$; ここで上の問 1 により $I_i\cap J_j$ は区間だから $E\cap F$ は区間塊である．

4. 区間 $I\in\mathfrak{I}_N$ を $I=I_1\times\cdots\times I_N$ $(I_\nu\in\mathfrak{I}_1)$ と表わす．全空間 R^N は

$$R^N=(I_1+I_1^c)\times\cdots\times(I_N+I_N^c)=(I_1\times\cdots\times I_N)+(I_1^c\times\cdots\times I_N)+\cdots\cdots\cdots$$

となるから，I^c は $J_1\times\cdots\times J_N$ (ここに $J_\nu=I_\nu$ または I_ν^c) なる形の集合の直和である．ところが $I_\nu=(a, b]$ ならば $I_\nu^c=(-\infty, a]+(b, \infty)$ だから，$J_1\times\cdots\times J_N$ は区間塊である．従って I^c は区間塊である．

5. E, F を区間塊とする．$E=I_1+\cdots+I_n$ $(I_j\in\mathfrak{I}_N)$ とすると，de Morgan の公式 (§2) により $E^c=I_1^c\cap\cdots\cap I_n^c$ だから，上の問 3 および 4 により $F\cap E^c$ は区間塊である．従って上の問 2 と §2 の問 1 により $E\cup F=E+(F\cap E^c)$ は区間塊である．

II.

§4. **1.** (4. 13′) は (4. 13) を有限回くりかえして使えばよい (厳密にいえば n に関する数学的帰納法)．(4. 14) の証: $A\supset B$ ならば $A=(A-B)+B$ と書けるから，(4. 13) と (4. 12) により $m(A)=m(A-B)+m(B)\geqq m(B)$．特に $m(B)<\infty$ ならば，左の等

*) もちろん x は A と B の両方に属することもある．数学においては，‘または’という言葉は少なくも一方が成立する場合に使うのが普通であって，両方同時に成立する場合も許される．

式の両辺から $m(B)$ を引けば $m(A)-m(B)=m(A-B)$. (4. 15) の証: $B_1=A_1$, $B_k=A_k-(A_1\cup\cdots\cup A_{k-1})$ $(k=2,\cdots,n)$ とおくと, $B_j\cap B_k=\phi$ $(j\neq k)$, $B_j\subset A_j$, $\sum_{j=1}^{n}B_j=\bigcup_{j=1}^{n}A_j$ だから (4. 13′), (4. 14) により

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{n}A_j\right)=m\left(\sum_{j=1}^{n}B_j\right)=\sum_{j=1}^{n}m(B_j)\leqq\sum_{j=1}^{n}m(A_j).$$

2. $m(A)<\infty$ なる $A\in\mathfrak{F}$ があれば, $m(A)+m(\phi)=m(A+\phi)=m(A)$ の両辺から $m(A)$ を引いて $m(\phi)=0$ を得る. 逆に $m(\phi)=0$ ならば, $A=\phi$ とすれば (4. 16) が成立する.

3. $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n},\ \frac{k}{n}\right]\times(0,1]\times\cdots\times(0,1]=(0,1]\times(0,1]\times\cdots\times(0,1]$ であって, 左辺の n 個の区間 (N 次元の) の m 測度は (4. 26) によって互いに等しいから, $m\left(\left(0,\frac{1}{n}\right]\times(0,1]\times\cdots\times(0,1]\right)=\frac{1}{n}$. 従って有限加法性により, 任意の正の有理数 r に対して $m((0,r]\times(0,1]\times\cdots\times(0,1])=r$. 任意の正の実数 λ に対して, $0<r<\lambda<s$ なる有理数 r, s をとれば, 単調性により $r\leqq m((0,\lambda]\times(0,1]\times\cdots\times(0,1])\leqq s$; ここで r, s は λ にどれだけでも近くとれるから $m((0,\lambda]\times(0,1]\times\cdots\times(0,1])=\lambda$. 従って (4. 26) により, 任意の 1 次元の区間 $(a_1, b_1]$ に対して $m((a_1,b_1]\times(0,1]\times\cdots\times(0,1])=b_1-a_1$. 以上の論法を第 2, 第 3, … の座標について順次くりかえせば, 区間 $I=(a_1,b_1]\times\cdots\times(a_N,b_N]$ に対して $m(I)=\prod_{\nu=1}^{N}(b_\nu-a_\nu)$ となる. すなわち区間 $I\in\mathfrak{F}_N$ に対して $m(I)$ は, 例 2 において $f_\nu(\lambda)=\lambda$ としたものと同じになった. 従ってこのことは, m の有限加法性により, 任意の区間塊に対して成立する.

4. $I=(a_1,b_1]\times\cdots\times(a_N,b_N]\in\mathfrak{F}_N$ に対して, $[-I]=[-b_1,-a_1)\times\cdots\times(-b_N,-a_N]$ であるから, $J_\delta=(-b_1-\delta,-a_1]\times\cdots\times(-b_N-\delta,-a_N]$ $(\delta>0)$ とすると $[-I]\subset J_\delta\in\mathfrak{F}_N$ となる. ところが $m(I)=\prod_{\nu=1}^{N}(b_\nu-a_\nu)$, $m(J_\delta)=\prod_{\nu=1}^{N}(b_\nu+\delta-a_\nu)$ であるから, 任意の $\varepsilon>0$ に対して十分小さい $\delta>0$ をとれば $m(J_\delta)\leqq m(I)+\varepsilon$ となる. 次に任意の $E=I_1+\cdots+I_n\in\mathfrak{F}_N$ $(I_k\in\mathfrak{F}_N)$ に対して, $[-E]=[-I_1]+\cdots+[-I_n]$ であり, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, 各 I_k に対して $[-I_k]\subset J_k\in\mathfrak{F}_N$, $m(J_k)\leqq m(I_k)+\varepsilon/n$ なる J_k がある. だから, $F=J_1\cup\cdots\cup J_n$ とおくと $F\in\mathfrak{F}_N$ ($\because\mathfrak{F}_N$ は有限加法族) であり, $[-E]\subset F$, $m(F)\leqq\sum_{k=1}^{n}m(J_k)\leqq\sum_{k=1}^{n}m(I_k)+\varepsilon=m(E)+\varepsilon$ となる.

§5. 1. $\Gamma(B)=\infty$ のときは $\Gamma(A\cup B)=\infty$ だから, 証明すべき式は $\infty=\infty$ の意味で成立する. 次に $\Gamma(B)<\infty$ とする. B は Γ- 可測だから $\Gamma(A)=\Gamma(A\cap B)+\Gamma(A\cap B^c)$ …(♯), $\Gamma(A\cup B)=\Gamma((A\cup B)\cap B)+\Gamma((A\cup B)\cap B^c)=\Gamma(B)+\Gamma(A\cap B^c)$. $\therefore\Gamma(A\cap B^c)=\Gamma(A\cup B)-\Gamma(B)$. これを (♯) に代入して $\Gamma(A)=\Gamma(A\cap B)+\Gamma(A\cup B)-\Gamma(B)$; この両辺に $\Gamma(B)$ を加えればよい.

2. まず R^N の一点 $x=(x_1,\cdots,x_N)$ から成る集合 $\{x\}$ は, 任意の $\varepsilon>0$ に対して

$\{x\}\subset(x_1-\varepsilon,\ x_1]\times\cdots\times(x_N-\varepsilon,\ x_N]$ となるから，$0\leqq\mu^*(\{x\})\leqq\varepsilon^N$. 従って $\mu^*(\{x\})=0$. だから，E が可算集合なら外測度の劣加法性によって $\mu^*(E)=0$.

3. 集合 A を $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ $(E_n\in\mathfrak{F}_N)$ と掩う任意の掩い方を考える．任意の x に対して $[A+x]\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}[E_n+x]$ だから，μ^* の定義と (4. 26) により $\mu^*([A+x])\leqq\sum_{n=1}^{\infty}m([E_n+x])=\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)$；この右辺の下限（はじめの A のあらゆる掩い方に対する）をとると $\mu^*([A+x])\leqq\mu^*(A)$. ここで A, x のかわりにそれぞれ $[A+x]$, $-x$ を考えると $\mu^*(A)=\mu^*([[A+x]-x])\leqq\mu^*([A+x])$. だから $\mu^*([A+x])=\mu^*(A)$ となる．

また最初の式 $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ から $[-A]\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}[-E_n]$ となるが，任意の $\varepsilon>0$ に対し，各 E_n に対して $[-E_n]\subset F_n\in\mathfrak{F}_N$, $m(F_n)\leqq m(E_n)+\varepsilon/2^n$ なる F_n が存在する（§4 問4）から，$[-A]\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, 従って $\mu^*([-A])\leqq\sum_{n=1}^{\infty}m(F_n)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)+\varepsilon$. ここで ε は任意の正数で $m(E_n)$ は ε に無関係だから $\mu^*([-A])\leqq\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)$；この右辺の下限（はじめの A のあらゆる掩い方に対する）をとれば $\mu^*([-A])\leqq\mu^*(A)$. A を $-A$ でおきかえて $\mu^*(A)=\mu^*([-[-A]])\leqq\mu^*([-A])$ を得るから，$\mu^*([-A])=\mu^*(A)$ となる．

§6. 1. 仮定によって $\mu(A_n{}^c)=0$ $(n=1,2,\cdots)$ だから，de Morgan の公式を使って $\mu\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n{}^c\right)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n{}^c)=0$. よって $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)=1$ である．

2. 相異なる k 個の点 $x_1,\cdots,x_k$ があって $\{x_j\}\in\mathfrak{B}$, $\mu(\{x_j\})>1/n$ $(j=1,\cdots,k)$ とすると，$\dfrac{k}{n}\leqq\sum_{j=1}^{k}\mu(\{x_j\})=\mu(\{x_1,\cdots,x_k\})\leqq\mu(X)<\infty$ だから，$k\leqq n\mu(X)<\infty$. だから $\mu(\{x\})>1/n$ なる点 x の全体 E_n は有限集合である．そして $\mu(\{x\})>0$ なる点 x の全体 E は，$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ と書けるから，高々可算無限集合である．

3. 仮定により $\sum_{k=n}^{\infty}\mu(A_k)\to0$ $(n\to\infty)$. また $\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$ だから，任意の n に対して $\mu\left(\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k\right)\leqq\mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\leqq\sum_{k=n}^{\infty}\mu(A_k)$. ここで $n\to\infty$ とすれば $\mu\left(\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k\right)=0$ 従って $\left(\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k\right)^c=\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k{}^c$（この式は de Morgan の公式を使って証明できる）により $\mu(\underline{\lim}A_k{}^c)=\mu(X)$.

4. $0\leqq\mu^*(A)\leqq\infty$ は明らか．特に空集合 ϕ に対しては，$\phi\subset\phi\in\mathfrak{B}$ と考えると $0\leqq\mu^*(\phi)\leqq\mu(\phi)=0$ だから，$\mu^*(\phi)=0$ である．μ^* の単調性：$A_1\subset A_2$ とするとき，$A_2\subset B\in\mathfrak{B}$ なる任意の B に対して，$A_1\subset B$ であるから $\mu^*(A_1)\leqq\mu(B)$；右辺の inf $(A_2\subset B\in\mathfrak{B})$ をとり $\mu^*(A_1)\leqq\mu^*(A_2)$. μ^* の劣加法性：$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ とし，任意の $\varepsilon>0$ をとるとき，各 A_n に対して $A_n\subset B_n\in\mathfrak{B}$, $\mu(B_n)\leqq\mu^*(A_n)+\varepsilon/2^n$ なる B_n が存在し，$B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ とおくと $A\subset B\in\mathfrak{B}$ であるから，$\mu^*(A)\leqq\mu(B)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)+\varepsilon$；

ここで ε は任意に小さい正数だから $\mu^*(A)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)$ である．

5. R^N の中の閉集合の全体，区間の全体，有界な閉区間の全体をそれぞれ $\mathfrak{C}_N$, $\mathfrak{I}_N$, $\mathfrak{K}_N$ とすると，$\mathfrak{K}_N\subset\mathfrak{C}_N$ によって $\mathfrak{B}[\mathfrak{K}_N]\subset\mathfrak{B}[\mathfrak{C}_N]\equiv\mathfrak{B}_N=\mathfrak{B}[\mathfrak{I}_N]$（定理 6. 4）となるから，$\mathfrak{B}[\mathfrak{I}_N]\subset\mathfrak{B}[\mathfrak{K}_N]$ を示せばよい．任意の $I\in\mathfrak{I}_N$ は $I=(a_1, b_1]\times\cdots\times(a_N, b_N]$ と表わされるから，各 ν $(=1, \cdots, N)$ に対して

$$\begin{cases} a_\nu>-\infty \text{ ならば } a_{\nu n}=a_\nu+\dfrac{1}{n},\ a_\nu=-\infty \text{ ならば } a_{\nu n}=-n, \\ b_\nu<\infty \text{ ならば } b_{\nu n}=b_\nu,\ b_\nu=\infty \text{ ならば } b_{\nu n}=n \end{cases}$$

として $K_n=[a_{1n}, b_{1n}]\times\cdots\times[a_{Nn}, b_{Nn}]$ とおくと，$K_n\in\mathfrak{K}_N$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n=I$. 従って $I\in\mathfrak{B}[\mathfrak{K}_N]$. だから $\mathfrak{I}_N\subset\mathfrak{B}[\mathfrak{K}_N]$. 従って $\mathfrak{B}[\mathfrak{I}_N]\subset\mathfrak{B}[\mathfrak{K}_N]$.

§**7. 1.** ベクトル x の長さを $|x|$ と書くことにする．任意の $\varepsilon>0$ に対して，定理 7. 4 と 7. 5 により $F\subset E\subset G$, $\mu(G-F)<\varepsilon$ なる開集合 G と有界閉集合 F が存在する．このとき適当な $\delta>0$ をとれば，$|x|<\delta$ なるかぎり $[F+x]\subset G$（付録§2 定理 3），従って $[F-x]\subset G$ でもあるから $F\subset[G+x]$ となる．このとき $[E+x]-E\subset[G+x]-F$ だから $\mu([E+x]-E)\leqq\mu([G+x]-F)=\mu([G+x])-\mu(F)=\mu(G)-\mu(F)=\mu(G-F)<\varepsilon$. また $E-[E+x]\subset G-[F+x]$ だから，同様にして $\mu(E-[E+x])<\varepsilon$. よって $\mu([E+x]\ominus E)\leqq\mu([E+x]-E)+\mu(E-[E+x])<2\varepsilon$.

2. $|f(x)-f(y)|=|\mu([A+x]\frown B)-\mu([A+y]\frown B)|$
$\leqq\mu(\{[A+x]\ominus[A+y]\}\frown B)\leqq\mu([A+x-y]\ominus A)\to0\ \ (|x-y|\to0)$.

3. 問題の x の集合を E とし，$E_n=E\frown(n-1, n]$ $(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ とすると $E=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}E_n$. また，$x\in E_n$ と $x-(n-1)\in E_1$ とは同等であるから $[E_n-(n-1)]=E_1$, 従って $\mu(E_n)=\mu(E_1)$. よって，$\mu(E_1)=0$ を示せば $\mu(E)=\sum_n\mu(E_n)=0$ となるから，$\mu(E_1)=0$ を示せばよい．p/q を固定したとき問題の条件‘…’を満たす x の集合を A_{pq} とし，$A_q=\bigcup_{p=1}^{q}A_{pq}$ とする．$x\in E_1$ ならば，無数に多くの q に対して $x\in A_q$ であるから，$x\in\overline{\lim_q}A_q$ となる（このことは§2で述べた最大極限集合の定義から容易にいえる)．すなわち $E_1\subset\overline{\lim}A_q$. 一方 A_{pq} の定義から明らかに $\mu(A_{pq})=2/q^\alpha$ だから，$\mu(A_q)\leqq2q/q^\alpha=2/q^{\alpha-1}$. ここで仮定により $\alpha-1>1$ だから $\sum_{q=1}^{\infty}\mu(A_q)<\infty$. だから§6 の問 3 により $\mu(\overline{\lim}A_q)=0$. 従って $\mu(E_1)=0$.

4. 点 $x(>c)$ を固定し，x より右から単調に x に近づく任意の点列 $\{x_n\}$ をとると，集合列 $\{[c, x_n]\}$ は単調減少で $\lim_{n\to\infty}[c, x_n]=[c, x]$ だから

$$\lim_{n\to\infty}f_c(x_n)=\lim_{n\to\infty}\mu([c, x_n])=\mu([c, x])=f_c(x).$$

よって $f_c(x)$ は右連続である．しかし連続とはかぎらない．例えば，集合 $E\in\mathfrak{B}_1$ が一点 $x=1$ を含めば $\mu(E)=1$, 含まなければ $\mu(E)=0$ と定義すると，μ は測度であるが，$c=0$ として $f_0(x)=\mu([0, x])$ を考えると，$x<1$ ならば $f(x)=0$, $x\geqq1$ ならば $f(x)$

$=1$ となり，$f(x)$ は $x=1$ で不連続である.*)

5. μ が連続な測度ならば $f_c(x)$ が連続なこと．任意の c と任意の $x>c$ とを固定し，x より左から単調に x に近づく任意の点列 $\{x_n\}$ をとると，集合列 $\{[c, x_n]\}$ は単調増加で $\lim_{n\to\infty}[c, x_n]=[c, x)$ であるが，仮定により一点 x から成る集合の測度が 0 だから

$$\lim_{n\to\infty} f_c(x_n)=\lim_{n\to\infty}\mu([c, x_n])=\mu([c, x))=\mu([c, x])=f_c(x).$$

すなわち $f_c(x)$ は $x>c$ で左連続である．右連続性はいつでも成立する（前問参照）から，$f_c(x)$ は $x\geqq c$ で連続である．

逆に，$f_c(x)$ が連続とする．任意の $x>c$ を固定して $\{x_n\}$ を上のようにとれば，

$$\mu([c, x])=f_c(x)=\lim_{n\to\infty} f_c(x_n)=\lim_{n\to\infty}\mu([c, x_n])=\mu([c, x))$$

だから，$\mu(\{x\})=\mu([c, x])-\mu([c, x))=0$. ここで c は任意だから x も任意にとることができて，μ は連続な測度である．

6. $\mu(B)>0$ だから，有界閉集合 $F\subset B$ で $\mu(F)>0$ なるものがある（定理 7. 6 およびその前の説明を見よ）．よって $\mu(F)=l(>0)$ とおき，また $F\subset[a, b]$ なる a, b をとって $f(x)=\mu([a, x]\cap F)$ とおくと，$y>x>a$ ならば $0\leqq f(y)-f(x)\leqq\mu([a, y])-\mu([a, x])$ だから，前問により $f(x)$ は $x>a$ で連続であり，また $f(a)=0$, $f(b)=l>0$ である．任意の $\alpha\in(0, l)$ に対して $x_\alpha=\sup\{x;\ f(x)\leqq\alpha\}$ とおくと，$f(x)$ の連続性により $f(x_\alpha)=\alpha$, 従って任意の $y>x_\alpha$ に対して $f(y)>\alpha=f(x_\alpha)$. だから $\mu((x_\alpha, y]\cap F)=\mu([a, y]\cap F)-\mu([a, x_\alpha]\cap F)=f(y)-f(x_\alpha)>0$. よって $(x_\alpha, y]\cap F\neq\phi$. y は x_α にいくらでも近くとれるから $x_\alpha\in\bar{F}=F$. だから任意の $\alpha\in(0, l)$ に対応する点 x_α が F の中にある．また $0<\alpha<\alpha'<l$ ならば $f(x_\alpha)=\alpha<\alpha'=f(x_{\alpha'})$ だから $x_\alpha\neq x_{\alpha'}$, すなわち相異なる α には相異なる点 x が対応する．だから開区間 $(0, l)$ と F の或る部分集合（上に定義した x_α の全体）とが一対一に対応するから，F の濃度は，従ってそれを含む B の濃度は連続体の濃度より小さくない．一方 $B\subset R^1$ だから，B の濃度は連続体の濃度を超えない．よって B の濃度は連続体の濃度に等しい．

§8. 1. $E\in\mathfrak{M}_\Gamma$ ならば $E\in\mathfrak{B}$ なることを示せばよい．$E\in\mathfrak{M}_\Gamma$ とすると，定理 8. 5 により $B_1\supset E\supset B_2$, $\mu(B_1-B_2)=0$ なる B_1, $B_2\in\mathfrak{B}$ があり，従って $B_1-E\subset B_1-B_2$. だから，$(X, \mathfrak{B}, \mu)$ が完備なことにより $B_1-E\in\mathfrak{B}$, 従って $E=B_1-(B_1-E)\in\mathfrak{B}$.

2. i) Borel 集合 $B\subset A$ に対して B_r を (8. 9) と同様に定義（小活字の部分の記号を使えば $B_r=[B+r]_1$ と定義）すれば $\mu(B_r)=\mu(B)$. また $0\leq r<s<1$ (r, s は有理数) ならば $B_r\cap B_s=\phi$, $\sum_r B_r\subset I$. だから $\mu(B)>0$ とすると $\mu(I)=\sum_r\mu(B_r)=\infty$ となって不合理である．

ii) 定理 7. 3 とその系により $\alpha=\inf_{A\subset B\in\mathfrak{B}_1}\mu(B)=\mu^*(A)$ であるから，もしも $\alpha=0$ とすると A は Lebesgue 可測でなければならない．だから $\alpha>0$ である．

---

*) x_n が 1 より左から 1 に近づくとき，集合列 $[0, x_n]$ の極限集合は右の開いた区間 $[0, 1)$ であって，閉区間 $[0, 1]$ にはならないためである．

§9. 1. **補助定理1の証明.** $K=(E_1^\circ\times F_1^\circ)+\cdots+(E_p^\circ\times F_p^\circ)$ とする. E_k° $(1\leqq k\leqq p)$ の中の任意の二つの差または任意の有限個の交わりとして表わされる空でない集合のうちで相異なるもの全体を $E_1', \cdots, E_q'$ とし, さらにそれらの E_j' の中で他の E_k' を含まないものの全体を $E_1, \cdots, E_n$ とする. このとき $j\neq k$ ならば $E_j\frown E_k=\phi$, $\sum_j E_j=\bigcup_k E_k^\circ$ であり, 各 E_j は少なくも一つの E_k° に含まれるから, $E_j\subset E_k^\circ$ なるすべての k に対する F_k° の和集合を F_j とすれば, (9. 12) が成立することは容易にわかる.

補助定理2の証明は本文中に述べたようにすればよい.

補助定理3の証明. 任意の点 $x\in E_n'$ をとると, $x\in E_{nj}$, $\mu_2(F_{nj})>c$ なる j がある. $E_{nj}\times F_{nj}\subset K_n\subset K_{n-1}=\sum_k(E_{n-1,k}\times F_{n-1,k})$ だから, (9. 15) と (9. 14) により, $E_{nj}\times F_{nj}\subset E_{n-1,k}\times F_{n-1,k}$ なる k がただ一つ存在し, $F_{n-1,k}\supset F_{nk}$ である. だから $\mu_2(F_{n-1,k})>c$ となり, $E_{n-1,k}\subset E_{n-1}'$ である. よって $x\in E_{nj}\subset E_{n-1,k}\subset E_{n-1}'$ となり, $E_n'\subset E_{n-1}'$ が証明された.

2. 一般に R^N における Lebesgue 測度を μ_N と書くことにする. R^{p+q} の中で

$$K=(A_1\times B_1)+\cdots+(A_n\times B_n)\quad (A_j\in\mathfrak{B}_p,\ B_j\in\mathfrak{B}_q)$$

なる形の集合の全体を $\mathfrak{K}_{pq}$ とすると, $\mathfrak{B}_{p+q}\supset\mathfrak{K}_{pq}\supset\mathfrak{J}_{p+q}$ だから

$$\mathfrak{B}_{p+q}\supset\mathfrak{B}[\mathfrak{K}_{pq}]\supset\mathfrak{B}[\mathfrak{J}_{p+q}]=\mathfrak{B}_{p+q},\ \text{従って}\ \mathfrak{B}_{p+q}=\mathfrak{B}[\mathfrak{K}_{pq}].$$

だから $\mathfrak{B}_{p+q}$ の上に μ_p と μ_q との直積測度 μ が定義される. 特に $K\in\mathfrak{J}_{p+q}(\subset\mathfrak{K}_{pq})$ ならば, $K=I\times J$ $(I\in\mathfrak{J}_p\subset\mathfrak{B}_p,\ J\in\mathfrak{J}_q\subset\mathfrak{B}_q)$ と書けて, $\mu(K)=\mu_p(I)\mu_q(J)=\mu_{p+q}(I\times J)=\mu_{p+q}(K)$. 従って任意の $K\in\mathfrak{J}_{p+q}$ に対して $\mu(K)=\mu_{p+q}(K)$. ところが $\mathfrak{B}_{p+q}=\mathfrak{B}[\mathfrak{J}_{p+q}]$ だから, $\mathfrak{J}_{p+q}$ の上の測度の $\mathfrak{B}_{p+q}$ の上への拡張は一意的である (定理 9. 1). だから $\mathfrak{B}_{p+q}$ の上で μ と μ_{p+q} とは一致する. すなわち μ は Lebesgue 測度 μ_{p+q} を $\mathfrak{B}_{p+q}$ の上で考えたものである. 従って μ_{p+q} は μ の完備化である.

III

§10. 1. $f=\sum_{j=1}^n\alpha_j\chi_{E_j}$ において, $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n$ と仮定してよい. すべての j に対して $E_j\in\mathfrak{B}$ とする. 任意の実数 a に対して, $a\leqq\alpha_1$ ならば $E(f<a)=\phi\in\mathfrak{B}$, $\alpha_j<a\leqq\alpha_{j+1}$ なる j $(1\leqq j<n)$ があれば $E(f<a)=E_1+\cdots+E_j\in\mathfrak{B}$, $a>\alpha_n$ ならば $E(f<a)=E\in\mathfrak{B}$. だから f は $\mathfrak{B}$-可測である. 逆に f が $\mathfrak{B}$-可測ならば, 各 j に対して $E_j=E(f=\alpha_j)\in\mathfrak{B}$.

2. $\mathfrak{A}=\{A;\ E(f\in A)\in\mathfrak{B}\}$ とおくと, $\mathfrak{A}$ は σ-加法族をなす. その証明: i) $E(f\in\phi)=\phi\in\mathfrak{B}$; ii) $A\in\mathfrak{A}$ ならば $E(f\in A^c)=E(f\in A)^c\in\mathfrak{B}$; iii) $A_n\in\mathfrak{A}$ $(n=1, 2, \cdots)$ ならば $E(f\in\bigcup_{n=1}^\infty A_n)=\bigcup_{n=1}^\infty E(f\in A_n)\in\mathfrak{B}$. だから $\mathfrak{A}$ は σ-加法族である. また $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{J}_1$ である; なぜならば, $I=(a, b]$ $(\in\mathfrak{J}_1)$ ならば $E(f\in I)=E(a<f\leqq b)\in\mathfrak{B}$. だから $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}[\mathfrak{J}_1]=\mathfrak{B}_1$, すなわち任意の $B\in\mathfrak{B}_1$ に対して $E(f\in B)\in\mathfrak{B}$.

3. 任意の実数 a に対して $\Lambda_a=\{\lambda;\ g(\lambda)<a\}$ とおくと, $\Lambda_a\in\mathfrak{B}_1$ だから, 前問によ

り $E(f\in\Lambda_a)\in\mathfrak{B}$. だから $E(h<a)=\{x;\ g(f(x))<a\}=\{x;\ f(x)\in\Lambda_a\}\in\mathfrak{B}$.

4. 付録 §1 の問3により，任意の実数 a に対して $E(f<a)=E\frown G_a$ なる開集合 G_a が存在する．そして $E\frown G_a\in\mathfrak{B}_N$ であるから，f は $\mathfrak{B}_N$- 可測である．

§11. 1. 右連続函数 $f(x)$ に対して $f_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ をヒントに述べたとおりに定義すると，任意の実数 a に対して $R^1(f_n<a)$ は $\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$ なる形の区間の高々可算無限個の和であるから，f_n は B- 可測である．また任意の x に対して，$\frac{k-1}{2^n}<x\leqq\frac{k}{2^n}$ となるような $\frac{k}{2^n}$ は，$n\to\infty$ のとき x の右から x に近づく（または十分大きいすべての n に対して x に一致する）から，f の右連続性により $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$. よって $f(x)$ は B- 可測である．

2. $\varepsilon=1/n$ $(n=1, 2, \cdots)$ に対する問題の $F_\varepsilon=F_{1/n}$ の和を A とする：$A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_{1/n}$. このとき $\mu(E-A)=0$ である．また任意の実数 a に対して，仮定と §10 の問4により $F_{1/n}(f<a)\in\mathfrak{B}_N$ だから，$A(f<a)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_{1/n}(f<a)\in\mathfrak{B}_N$. そして $E(f<a)$ は $A(f<a)$ と $E-A$ の部分集合（それは零集合）との和だから Lebesgue 可測である．

3. 任意の実数 a に対して $K(a)$, $A_n(a)$, $B_n(a)$ をヒントで述べたように定義すると，$A_n(a)\subset K(a)\subset B_n(a)$；また $\{A_n(a)\}$, $\{B_n(a)\}$ はそれぞれ単調増加，単調減少な可測集合列であるから，$A(a)=\lim A_n(a)$, $B(a)=\lim B_n(a)$ が存在して可測であり $A(a)\subset K(a)\subset B(a)$ となる．よって $\mu_2(B(a)-A(a))=0$ (μ_2 は R^2 における Lebesgue 測度）を示せば $K(a)$ が可測集合になる．さて任意の n を固定するとき，各 k に対して

$$E_k=\left\{x;\ f\left(x, \frac{k-1}{2^n}\right)<a\leqq f\left(x, \frac{k}{2^n}\right)\right\}$$

は仮定により可測集合であり $E_j\frown E_k=\phi$ $(j\neq k)$, $\sum\limits_{k=1}^{2^n}E_k\subset(0, 1]$ である．$(x, y)\in B_n(a)-A_n(a)$ とすると，$x\in E_k$ なる k がただ一つあり，仮定（y に関する単調性）を使って，$(x, y)\in B_n(a)$ と $f\left(x, \frac{k-1}{2^n}\right)<a$ とから $y\leqq\frac{k}{2^n}$, また $(x, y)\notin A_n(a)$ と $f\left(x, \frac{k}{2^n}\right)\geqq a$ とから $y>\frac{k-1}{2^n}$ が出る．従って $(x, y)\in E_k\times\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$. だから $B_n(a)-A_n(a)\subset\sum\limits_{k=1}^{2^n}E_k\times\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$. よって，$R^1$ における Lebesgue 測度を μ_1 と書くことにすれば，

$$\mu_2(B_n(a)-A_n(a))\leqq\sum_{k=1}^{2^n}\mu_1(E_k)\mu_1\left(\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]\right)=\frac{1}{2^n}\mu_1\left(\sum_{k=1}^{2^n}E_k\right)\leqq\frac{1}{2^n}.$$

だから $\mu_2(B(a)-A(a))=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_2(B_n(a)-A_n(a))=0$ となる．

§12. 1. i) $K\,(\subset R^N)$ の上での f の Riemann 積分，Lebesgue 積分をそれぞれ $\int fdx$, $\int fd\mu$ と書く．$f\geqq0$ の場合に問題の証明をすればよい．区間 K をすべての座標軸の方向に 2^n 等分した分割を $K=K_{n1}+\cdots+K_{nk_n}$ $(k_n=2^{nN})$ とする．各 K_{nj} の中

に一点 x_{nj} をとって $\alpha_{nj}=f(x_{nj})$ とおき，また $\beta_{nj}=\inf\{f(x);\ x\in K_{nj}\}$ として $f_n(x)=\sum_{j=1}^{k}\beta_{nj}\chi_{K_{nj}}(x)$，$\delta_n=\max_{1\leqq j\leqq k_n}|\alpha_{nj}-\beta_{nj}|$ とおくと，$f_n(x)$ は n について単調増加であり，f の K における一様連続性によって $\lim f_n(x)=f(x)$，$\lim\delta_n=0$ である．各小区間 K_{nj} の体積（Riemann 積分の意味で）はその Lebesgue 測度 $\mu(K_{nj})$ と同じであるから，Riemann 積分，Lebesgue 積分の定義により

$$\lim_{n\to\infty}\sum_j\alpha_{nj}\mu(K_{nj})=\int f\,dx,\quad \lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu=\int f\,d\mu.$$

ところが

$$\left|\sum_j\alpha_{nj}\mu(K_{nj})-\int f_n d\mu\right|\leqq\sum_j|\alpha_{nj}-\beta_{nj}|\mu(K_{nj})\leqq\delta_n\mu(K)\to 0\ (n\to\infty).$$

だから $\int f\,dx=\int f\,d\mu$ である．

ii) J に含まれる有限閉区間の単調増加列 $\{K_n\}$ で J に近づくものをとると，$\lim_{n\to\infty}\int_{K_n}f\,dx=\int_J f\,dx$ *) $\cdots(1)$．また $f_n(x)=\sum_j\alpha_{nj}\chi_{K_{nj}}(x)$（$K_{nj}$ は K_n を分割した小区間，従って $x\notin K_n$ なら $f_n(x)=0$），$0\leqq f_n(x)\leqq f(x)$ なる単函数 $f_n(x)$ の単調増加列で，J の上で $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ となるものを作ることができて，Lebesgue 積分の定義により $\lim_{n\to\infty}\int_J f_n\,d\mu=\int_J f\,d\mu\cdots(2)$．一方 Riemann 積分の定義と i) により $\int_J f_n\,d\mu=\int_{K_n}f_n\,dx\leqq\int_{K_n}f\,dx=\int_{K_n}f\,d\mu\leqq\int_J f\,d\mu$．ここで $n\to\infty$ とすると，(2) と (1) により $\int_J f\,d\mu\leqq\int_J f\,dx\leqq\int_J f\,d\mu$ となるから ii) が証明された．

2. $-\infty\leqq f\leqq\infty$ のときは積分の定義から明らかであるから，f が複素数値の場合を証明する．$\varphi(x)$，a，α を本文中に定義したとおりとすると

$$\left|\int_E f\,d\mu\right|=|a|=\bar\alpha a=\int_E|f|\bar\alpha\varphi\,d\mu.$$

ここで，$|\bar\alpha\varphi(x)|=1$ または 0 であるから，$\Re[\bar\alpha\varphi(x)]\leqq 1$ である．だから上の式の両辺の実数部分をとれば

$$\left|\int_E f\,d\mu\right|=\int_E|f|\Re[\bar\alpha\varphi]\,d\mu\leqq\int_E|f|\,d\mu.$$

3. $f(x)\geqq 0$ の場合に証明すればよい．$f(x)=\sum\alpha_j\chi_{E_j}(x)$（単函数）の場合には $f(x+y)=\sum\alpha_j\chi_{[E_j-y]}(x)$ だから，$f(x+y)$ は x の可測函数で

$$\int_{R^N}f(x+y)dx=\sum_j\alpha_j\mu([E_j-x])=\sum_j\alpha_j\mu(E_j)=\int_{R^N}f(x)dx.$$

一般の $f(x)$（$\geqq 0$）に対しては，$f(x)$ に近づく単函数 $f_n(x)$（$\geqq 0$）の単調増加列をとれば，$\{f_n(x+y)\}$ も単函数の単調増加列で $\lim_{n\to\infty}f_n(x+y)=f(x+y)$ となる．だから

*) 広義 Riemann 積分の定義により．

$f(x+y)$ は x の可測函数で

$$\int_{R^N} f(x+y)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{R^N} f_n(x+y)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{R^N} f_n(x)dx=\int_{R^N} f(x)dx.$$

$f(-x)$ についても同様に証明できる．

4. 分割 (Δ) に対して $f_\Delta(x)=\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\chi_{E_j-E_{j+1}}(x)$ （ただし $E_n=\phi$）とおくと，f_Δ は単函数で $0\leqq f_\Delta(x)\leqq f(x)$．だから積分の定義（および $\alpha_0=0$, $\mu(E_n)=0$）により

$$\int_E f\,d\mu\geqq\int_E f_\Delta\,d\mu=\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\{\mu(E_j)-\mu(E_{j+1})\}=\sum_{j=1}^{n-1}(\alpha_j-\alpha_{j-1})\mu(E_j)=S_\Delta.$$

一方任意の $\varepsilon>0$ に対して $\max_{1\leqq j\leqq n}|\alpha_j-\alpha_{j-1}|<\varepsilon$ なる分割 (Δ) が存在するから，

$f(x)-\varepsilon<f_\Delta(x)\leqq f(x)$．だから積分の定義により $\int_E f\,d\mu-\varepsilon\mu(E)\leqq S_\Delta\leqq\int_E f\,d\mu.$

ε は任意に小さくとれるから $\sup_\Delta S_\Delta=\int_E f\,d\mu.$

5. f が単函数：$f(x)=\sum_j\alpha_j\chi_{E_j}(x)$ $(\alpha_j\geqq 0)$，の場合は，$E_f=\sum_j E_j\times[0,\ \alpha_j)$ だから，E_f は Lebesgue 可測であり，

$$\mu_{N+1}(E_f)=\sum_j\mu_N(E_j)\mu_1([0,\ \alpha_j])=\sum_j\alpha_j\mu_N(E_j)=\int_E f\,d\mu_N.$$

一般の $f(x)\geqq 0$ に対しては，単函数 $f_n(x)\geqq 0$ の単調増加列で $f(x)$ に近づくものをとると，各 E_{f_n} は Lebesgue 可測集合であり，集合列 $\{E_{f_n}\}$ は単調増加で集合 E_f に近づく．だから E_f は Lebesgue 可測集合であって，積分 $\int f\,d\mu_N$ の定義により

$$\mu_{N+1}(E_f)=\lim_{n\to\infty}\mu_{N+1}(E_{f_n})=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu_N=\int_E f\,d\mu_N.$$

6. $E=E_1+\cdots+E_n$ なる任意の分割に対して，定理 12. 1 により $|\Phi(E_j)|\leqq\int_{E_j}|f|d\mu$ だから，$\sum_j|\Phi(E_j)|\leqq\int_E|f|d\mu$．よって $\sup\sum_j|\Phi(E_j)|\leqq\int_E|f|d\mu\cdots(1)$．次に，$f=g_1-g_2+i(g_3-g_4)$ $(g_1=(\Re f)^+,\ g_2=(\Re f)^-,\ g_3=(\Im f)^+,\ g_4=(\Im f)^-)$ とすると，各 $g_k\,(1\leqq k\leqq 4)$ に対して，それに収束する単函数 $(\geqq 0)$ の単調増加列 $\{g_{kn};\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ が存在し，各 n に対して $f_n=g_{1n}-g_{2n}+i(g_{3n}-g_{4n})$ は複素数値単函数であって，$\{|f_n|;\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ は単調増加で $|f|$ に近づく．だから $\lim_{n\to\infty}\int_E|f_n|d\mu=\int_E|f|d\mu\cdots\cdots(2)$．また，集合 $A(\subset E)$ の上で $\Re f$, $\Im f$ がともに符号が一定で，f_n は定数 α（複素数）であるとすると，A の上では g_1 と g_2 の少なくも一方，g_3 と g_4 の少なくも一方は恒等的に 0 だから

$$|\Phi(A)|^2=\left(\int_A g_1d\mu+\int_A g_2\,d\mu\right)^2+\left(\int_A g_3d\mu+\int_A g_4\,d\mu\right)^2$$
$$\geqq\left(\int_A g_{1n}\,d\mu+\int_A g_{2n}d\mu\right)^2+\left(\int_A g_{3n}\,d\mu+\int_A g_{4n}d\mu\right)^2$$

$$=\left|\int_A f_n d\mu\right|^2=|\alpha\mu(A)|^2=\left(\int_A|f_n|d\mu\right)^2,$$

すなわち $|\Phi(A)|\geqq\int_A|f_n|d\mu$. さて各 f_n は $f_n=\sum_j \alpha_{nj}\chi_{E_{nj}}$ の形に書けるが，分割 $E=\sum_j E_{nj}$ を細かくすることにより，各 E_{nj} の上では $\Re f$, $\Im f$ の符号が一定であるようにできる．だから，上に述べたことにより，任意の n に対して

$$\sum_j|\Phi(E_{nj})|\geqq\sum_j\int_{E_{nj}}|f_n|d\mu=\int_E|f_n|d\mu.$$

これと (2) とから $\lim_{n\to\infty}\sum_j|\Phi(E_{nj})|\geqq\int_E|f|d\mu$. 従って $\sup\sum_j|\Phi(E_j)|\geqq\int_E|f|d\mu$.

これと (1) とから問題の等式を得る．

§13. 1. $\lim_{n\to\infty}|f_n-f|^p=0$, $|f_n-f|^p\leqq||f_n|+|f||^p\leqq|2\varphi|^p$, $\int|2\varphi|^p d\mu<\infty$ だから，定理 13. 6 により $\lim_{n\to\infty}\int|f_n-f|^p d\mu=0$.

2. $f(x)$ は有界だから $|f(x)|\leqq M$ とする．まず

$$\int K(t,\ x-y)f(y)dy=\int(4\pi t)^{-\frac{N}{2}}\exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{4t}\right)f(y)dy=\int\pi^{-\frac{N}{2}}e^{-\|z\|^2}f(x-2\sqrt{t}\,z)\,dz$$

(変数変換 $x-y=2\sqrt{t}\,z$ による)．ここで $|\pi^{-\frac{N}{2}}e^{-\|z\|^2}f(x-2\sqrt{t}\,z)|\leqq M\pi^{-\frac{N}{2}}e^{-\|z\|^2}$ であり $\int\pi^{-\frac{N}{2}}e^{-\|z\|^2}dz=1$, また $f(x)$ の連続性により $\lim_{t\downarrow 0}f(x-2\sqrt{t}\,z)=f(x)$ だから，定理 13. 6′ により $\lim_{t\downarrow 0}\int K(t,\ x-y)f(y)dy=\int\pi^{-\frac{N}{2}}e^{-\|z\|^2}f(x)dz=f(x)$.

3. $|(e^{i\lambda x}-e^{i\lambda_0 x})f(x)|\leqq 2|f(x)|$, $\int|f(x)|dx<\infty$ だから，定理 13. 6′ により

$|\varphi(\lambda)-\varphi(\lambda_0)|\leqq\int|(e^{i\lambda x}-e^{i\lambda_0 x})f(x)|dx\to 0$ $(\lambda\to\lambda_0)$.

§14. 1. $0<a<b$ なる任意の a, b を定めて，$a<s<b$ で考えればよい．$\varphi_a(x)=e^{-x}x^{a-1}(\log x)^n$ とおくと，$\Gamma(s)$ を定義する式の被積分函数を s で n 回偏微分したものは $|e^{-x}x^{s-1}(\log x)^n|\leqq\varphi_a(x)(0<x<1)$, $\leqq\varphi_b(x)(1\leqq x<\infty)$ を満たし，$\int_0^\infty\{\varphi_a(x)+\varphi_b(x)\}dx<\infty$ だから，定理 14. 2 により本題の $\Gamma^{(n)}(x)$ の式が得られる．

2. $0<\varepsilon<1<\eta<\infty$ なる任意の ε, η をとり，$\varepsilon<t<\eta$, $\|x\|<\eta$ なる範囲で証明すればよい (ε は任意に 0 に近く，η は任意に大きくとれるから)．計算により

$$\frac{\partial K(t,\ x)}{\partial x_j}=-\frac{x_j}{2t}K(t,\ x),\quad \frac{\partial^2 K(t,\ x)}{\partial x_j\partial x_k}=\left(-\frac{\delta_{jk}}{2t}+\frac{x_j x_k}{4t^2}\right)K(t,\ x),\quad \delta_{jk}=\begin{cases}1 & (j=k)\\ 0 & (j\neq k),\end{cases}$$

$$\frac{\partial K(t,\ x)}{\partial t}=\left(-\frac{N}{2t}+\frac{\|x\|^2}{4t^2}\right)K(t,\ x)=\sum_{j=1}^N\frac{\partial^2 K(t,\ x)}{\partial x_j^2}$$

だから，適当な定数 A_1, A_2, A (ε と η に関係する) をとって

$$\left|\frac{\partial K(t,\ x-y)}{\partial x_j}\right|,\quad \left|\frac{\partial^2 K(t,\ x-y)}{\partial x_j\partial x_k}\right|,\quad \left|\frac{\partial K(t,\ x-y)}{\partial t}\right|\leqq(A_1+A_2\|y\|^2)e^{-\|y\|^2/\eta}\leqq A\quad、$$

($\varepsilon<t<\eta$, $\|x\|<\eta$ なるかぎり) が成立するようにできる. よって,

$$\left|\frac{\partial K(t,\,x-y)}{\partial x_j}f(x)\right|\leqq\begin{cases}A|f(y)| & (f\ が積分可能の場合)\\ M(A_1+A_2\|y\|^2e^{-\|y\|^2/\eta}) & (f\ が有界:\ |f(x)|\leqq M,\ の場合)\end{cases}$$

と考えれば, 定理 14. 2 が使えて, 問題の $\partial u/\partial x_j$ の式が得られる. $\partial^2u/\partial x_j\partial x_k$, $\partial u/\partial t$ の式についても同様である.

3. $\varphi(\lambda)$ を定義する式の被積分函数を λ で1回, および2回偏微分したものは

$$\left.\begin{matrix}|ixe^{i\lambda x}f(x)|\\ |-x^2e^{i\lambda x}f(x)|\end{matrix}\right\}\leqq(1+x^2)|f(x)|$$ であるから, 仮定により定理 14. 2 が使えて,

$\varphi'(\lambda)=\int ixe^{i\lambda x}f(x)dx$, $\varphi''(\lambda)=-\int x^2e^{i\lambda x}f(x)dx$. この $\varphi'(\lambda)$, $\varphi''(\lambda)$ が連続なことは §13 問3 によってわかる.

4. $e^{i\lambda x-tx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-tx^2}(i\lambda x)^n/n\,!$ であって, 定理 13. 1 により

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{e^{-tx^2}|\lambda x|^n/n\,!\}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{|\lambda x|-tx^2}dx<\infty$$

だから, 定理 13. 7 により項別積分ができる. n が奇数ならば $\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda x)^ne^{-tx^2}dx=0$. n が偶数ならば $n=2m$, $x=y/\sqrt{t}$ とおくと, (14. 7) により

$$\int_{-\infty}^{\infty}(i\lambda x)^ne^{-tx^2}dx\Big/n\,!=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{i\lambda y}{t^{1/2}}\right)^{2m}e^{-y^2}\frac{dy}{t^{1/2}}\Big/(2m)\,!$$

$$=\frac{(-1)^m1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2m-1)\lambda^{2m}\pi^{1/2}}{2^m(2m)\,!\ t^{m+1/2}}=\frac{(-1)^m\lambda^{2m}\pi^{1/2}}{2^m\cdot2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2m\cdot t^{m+1/2}}=\frac{1}{m!}\left(\frac{-\lambda^2}{4t}\right)^m\left(\frac{\pi}{t}\right)^{1/2}.$$

だから

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-tx^2}dx=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m\,!}\left(\frac{-\lambda^2}{4t}\right)^m\left(\frac{\pi}{t}\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\lambda^2/4t}.$$

§15. 1. 定理 15. 2 の3により $f(x)+g(y)$ は μ_2-a. e. y に対して x の函数として X の上で可積分, 従って或る y_0 が存在して $f(x)+g(y_0)$ が X の上で可積分である. このとき $g(y_0)$ は或る有限な数だから X の上で可積分である ($\because\mu_1(X)<\infty$). だから, $|f(x)|\leqq|f(x)+g(y_0)|+|g(y_0)|$ により, $f(x)$ も X の上で可積分である. $g(y)$ についても同様である.

2. $f(x)\geqq0$ のときに証明すればよい. そのとき定理 11. 1 により, $0\leqq g(x)\leqq f(x)\leqq h(x)$ であって $g(x)=f(x)=h(x)$ (a. e.) なる B-可測函数 $g(x)$, $h(x)$ が存在する. だから R^{2N} の上で $g(x+y)\leqq f(x+y)\leqq h(x+y)$ であって, $g(x+y)$ と $h(x+y)$ とは定理 11. 4 によって B-可測である. だから定理 15. 2 と定理 12. 7 により

$$\iint_{R^{2N}}|h(x+y)-g(x+y)|dxdy=\int_{R^N}dy\int_{R^N}|h(x+y)-g(x+y)|dx$$

$$=\int_{R^N}dy\int_{R^N}|h(x)-g(x)|dx=0.$$

従って a. e. $(x,\,y)\in R^{2N}$ に対して $h(x+y)=f(x+y)=g(x+y)$ となり, $f(x+y)$ は

R^{2N} の上で Lebesgue 可測函数である．$f(x-y)$ についても同様である．

3. ヒントに述べたように $\mu([A-x]\frown B)=\int\chi_A(y+x)\chi_B(y)dy$ であって，前問により $\chi_A(y+x)\chi_B(y)$ は Lebesgue 可測函数であるから，定理 15. 3 と定理 12. 7 により $\int\mu([A-x]\frown B)dx=\int\chi_B(y)\int\chi_A(y+x)dx=\int\chi_B(y)dy\int\chi_A(x)dx=\mu(B)\mu(A)$.

4. この § の問 2 により $f(x-y)g(y)$ は (x, y) の可測函数であるから，定理 15. 3 の 2) により

$$\int dx\int|f(x-y)g(y)|dy=\int|g(y)|dy\int|f(x-y)|dx=\int|g(y)|dy\int|f(x)|dx<\infty.$$

だから $h(x)$ が a. e. x に対して有限な値として定義せられ，上の計算により $\int|h(x)|dx \leqq\int dx\int|f(x-y)g(y)|dy<\infty$. 従ってまた，定理 12. 7 により

$$h(x)=\int f(x-y)g(y)dy=\int f(x+y)g(-y)dy=\int g(x-y)f(y)dy.$$

5. 前問と同様に $\int\int|e^{-2\pi i\xi\cdot x}f(x-y)g(y)|dxdy<\infty$ だから，定理 15. 3 により

$$\hat{h}(\xi)=\int e^{-2\pi i\xi\cdot x}dx\int f(x-y)\,g(y)dy=\int e^{-2\pi i\xi\cdot y}g(y)dy\int e^{-2\pi i\xi\cdot(x-y)}f(x-y)dx$$

$$=\int e^{-2\pi i\xi\cdot y}g(y)dy\int e^{-2\pi i\xi\cdot x}f(x)dx=\hat{g}(\xi)\hat{f}(\xi).$$

6. R^N の中の任意の区間（有界であってもなくてもよい）は，有界な閉区間の単調増加列の極限集合として表わされるから，$\mathfrak{M}\supset\mathfrak{I}_N$，従って仮定により $\mathfrak{M}\supset\mathfrak{F}_N$ となる（$\mathfrak{I}_N$, $\mathfrak{F}_N$ はそれぞれ R^N における区間，区間塊の全体）．$\mathfrak{F}_N$ は有限加法族だから，定理 15. 1 と定理 6. 4 により $\mathfrak{M}\supset\mathfrak{B}[\mathfrak{F}_N]=\mathfrak{B}_N$ となる．

§16. 1. $f_n(x)=f(x)$ $(1/n\leqq x\leqq n$ のとき$)$, $=0$ $(0<x<1/n$ または $x>n$ のとき$)$ と定義すると，$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，また $\{|f_n(x)|\}$ は n について単調増加である．$f(x)$ は $[1/n, n]$ で Riemann 積分可能だから，$f_n(x)$ は $[1/n, n]$ で，従って $(0, \infty)$ で Lebesgue 積分可能である．だから $f(x)$ は $(0, \infty)$ で Lebesgue 可測で

$$\int_0^\infty|f(x)|d\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty|f_n(x)|d\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^n|f(x)|dx=\int_0^\infty|f(x)|dx<\infty.$$

すなわち $f(x)$ は $(0, \infty)$ で Lebesgue 積分可能である．しかも $|f_n(x)|\leqq|f(x)|$ だから，定理 13. 6 により

$$\int_0^\infty f(x)d\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)d\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^n f(x)dx=\int_0^\infty f(x)dx.$$

2. 例えば $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{\pi}{x}$ とすると，変数変換 $x=\dfrac{1}{y}$ により $\int_{1/(n+1)}^{1/n}f(x)dx =\int_n^{n+1}\dfrac{\sin\pi y}{y}dy=(-1)^n\int_n^{n+1}\dfrac{|\sin\pi y|}{y}dy$ であって $\int_n^{n+1}\dfrac{|\sin\pi y|}{y}dy\leqq\dfrac{1}{n}$ だから，

$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{1/(n+1)}^{1/n} f(x)dx$ は収束する交項級数である．すなわち $f(x)$ は $(0,1)$ で広義 Riemann 積分可能である．しかし，上の計算により $\int_{1/(n+1)}^{1/n}|f(x)|dx \geqq \frac{1}{n+1}\int_n^{n+1}|\sin \pi y|dy = \frac{2}{\pi(n+1)}$ だから $\int_0^1|f(x)|dx=\infty$ である．

IV

§17. 1. 定理 13. 3 による．

2. $\varphi(x)$ は R^1 で有界であって右連続な単調増加函数 φ_1, φ_2 の差として表わせる：$\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$. 区間 $I=(a, b]$ に対して $\Psi_1(I)=\varphi_1(b)-\varphi_1(a)$, 区間塊 $E=I_1+\cdots+I_n \in \mathfrak{F}_1$ に対して $\Psi_1(E)=\Psi_1(I_1)+\cdots+\Psi_1(I_n)$ とすると，Ψ_1 は有限加法族 $\mathfrak{F}_1$ の上で完全加法的な測度である（定理 4. 2）から，$\mathfrak{B}_1$ の上の測度 μ_1 に拡張される（定理 9. 1）．だから区間 $I=(a, b]$ に対しては $\mu_1(I)=\Psi_1(I)=\varphi_1(b)-\varphi_1(a)$. φ_2 からも同様にして $\mathfrak{B}_1$ の上の測度 μ_2 が定義されるから，$\Phi=\mu_1-\mu_2$ とすればよい．

§18. 1. Φ が特異だから，$\mu(E_0)=0$ なる E_0 が存在して $A\subset X-E_0$ ならば $\Phi(A)=0$ となる．だから，$E\subset X-E_0$ ならば $\bar{V}_\Phi(E)=\sup_{A\subset E}\Phi(A)=0$, すなわち $\bar{V}_\Phi$ は特異である．$\underline{V}_\Phi$ についても同様に証明できる．

2. 絶対連続の場合は定義から容易である．特異の場合：$\mu(E_1)=0$ なる E_1 が存在して $E\subset X-E_1$ ならば $\Phi(E)=0$; また $\mu(E_2)=0$ なる E_2 が存在して $E\subset X-E_2$ ならば $\Psi(E)=0$. よって $E_0=E_1\cup E_2$ とすれば $\mu(E_0)=0$ であって，$E\subset X-E_0$ ならば $F(E)=0$ である．

3. 補助定理 1 の証明. Φ がどの X_n の上でも絶対連続とすると，各 n について，$\mu(E)=0$ なる集合 $E\subset X_n$ に対しては $\Phi(E)=0$ である．$\mu(E)=0$ なる任意の $E\subset X$ に対して，$E_1=E\cap X_1$, $E_n=E\cap\left(X_n-\bigcup_{\nu=1}^{n-1}X_\nu\right)$ $(n\geqq 2)$ とおくと，$E=\sum_{n=1}^{\infty}E_n$ であって，$\mu(E_n)=0$ だから $\Phi(E_n)=0$ $(n=1, 2, \cdots)$; 従って $\Phi(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(E_n)=0$. だから Φ は X の上で絶対連続である．

Φ がどの X_n の上でも特異とすると，各 n に対して $\mu(N_n)=0$ なる $N_n\subset X_n$ が存在して $E\subset X_n-N_n$ ならば $\Phi(E)=0$ となる．$N=\bigcup_{n=1}^{\infty}N_n$ とすると $\mu(N)=0$ である．そして，任意の $E\subset X-N$ に対して E_n を上に述べたように定義すると，$E_n\subset X_n-N_n$ だから $\Phi(E_n)=0$, 従って $\Phi(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(E_n)=0$. よって Φ は X の上で特異である．

補助定理 2 の証明. まず Φ が特異なことにより $\mu(E_0)=0$ なる E_0 が存在して，$E\subset X-E_0$ ならば $\Phi(E)=0$. また $E\subset E_0$ なら $\mu(E)=0$ だから，Φ が絶対連続なことにより $\Phi(E)=0$. だから任意の $E\subset X$ に対して $\Phi(E)=\Phi(E\cap E_0)+\Phi(E-E_0)=0$.

4. i) 仮定により任意の集合 E に対して $\mu_2(E)=\int_E f(x)d\mu_1(x)$. ここで $f(x)>0$ (μ_1-a. e.)だから，$\mu_2(E)=0$ ならば $\mu_1(E)=0$; すなわち μ_1 は μ_2 に関して絶対連続で

ある．従って $\mu_1(E)=\int_E g(x)d\mu_2(x)$ と書ける．よって問題の後半は，$f(x)g(x)=1$ (μ_2-a.e.) を示せばよい．$\mu_2(X(f\cdot g>1))>0$ と仮定すると，或る $\varepsilon>0$ が存在して $\mu_2(X(f\cdot g>1+2\varepsilon))>0$ だから，

$$E_\alpha=X(f\cdot g>1+2\varepsilon,\ \alpha(1+\varepsilon)>f>\alpha)$$

とおくと，適当な $\alpha>0$ に対して $\mu_2(E_\alpha)>0$ となる．このとき $x\in E_\alpha$ ならば

$$f(x)>\alpha,\quad g(x)>\frac{1+2\varepsilon}{f(x)}>\frac{1+2\varepsilon}{\alpha(1+\varepsilon)}$$

だから，$\mu_2(E_\alpha)>\alpha\mu_1(E_\alpha)=\alpha\int_{E\alpha}g(x)d\mu_2(x)>\dfrac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon}\mu_2(E_\alpha)$ となって矛盾である．だから $\mu_2(X(f\cdot g>1))=0$. 同様にして $\mu_2(X(f\cdot g<1))=0$. ii) の証明は i) の後半の証明と同じである．

5. Hahn の分解定理により，$\Phi\geqq 0$ の場合に証明すればよい．$\Phi(R^N)<\infty$ であるから，任意の n に対して $\Phi(\{x\})>1/n$ なる点 x の個数は有限である ($\{x\}$ は一点 x から成る集合)．従って$A=\{x;\ \Phi(\{x\})>0\}$ は高々可算集合である．だから $\Phi_0(E)=\Phi(E\frown A^c)$ は連続な集合函数であって，Radon-Nikodym の定理により $\Phi_0=\Phi_1+\Phi_2$ (Φ_1, Φ_2 は問5に書いたもの) と分解される．よって $\Phi_3(E)=\Phi(E\frown A)$ とおくと，これは純粋不連続であって，$\Phi=\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3$ となる．分解の一意性は容易である．

§**19. 1.** i) $f_n(x)\geqq 0$ で $\int_0^1 f_n(x)dx\leqq\int_{r_n-1}^{r_n+1}2^{-n}|x-r_n|^{-1/2}dx=2^{-n+2}$ だから，$f(x)\geqq 0$ であって $\int_0^1 f(x)dx\leqq\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n+2}<\infty$. すなわち $f(x)$ は $[0,1]$ で Lebesgue 積分可能，従って $F'(x)=f(x)$ (a.e.). ii) 任意の有理数 r_n に対して，$h>0$ ならば

$$\frac{F(r_n+h)-F(r_n)}{h}=\frac{1}{h}\int_{r_n}^{r_n+h}f(x)dx\geqq\frac{1}{h}\int_{r_n}^{r_n+h}f_n(x)dx\geqq\frac{1}{2^nh^{1/2}}\to\infty\ \ (h\to 0).$$

だから $F'(r_n)$ は存在しない．(一点 r_n における $f_n(x)$ の値は積分に関係しない．)

2. この命題は $F(x)$ が絶対連続でないときは成立しない．例えば $F(x)$ を Cantor 函数 (§7) とすると，x が Cantor 集合に属しないならば $F'(x)=0$ ($\because x$ の十分小さい近傍では $f(x)$ は定数)．だから $F'(x)=0$ (a.e.) であり，$F'(x)$ は Lebesgue 積分可能であるが，$F(1)-F(0)=1\neq 0=\int_0^1 F'(x)dx$.

§**20. 1.** f も Φ も実数値 (f は $\pm\infty$ を許す) の場合だけを証明するのには，(20.4) の右辺と，その各項の絶対値を加えたものとを比較すればよい．一般に f, Φ が複素数値の場合には次のようにする．§18 の最後に述べたように $\mu(E)=V(\Re\Phi;\ E)+V(\Im\Phi;\ E)$ とすると $\Phi(E)=\int_E\varphi d\mu$. $V_\Phi(E)=\int_E|\varphi|d\mu$ となる φ が存在するから，定理 20.1 と定理 12.1 とにより

$$\left|\int_X fd\Phi\right|=\left|\int_X f\varphi d\mu\right|\leqq\int_X|f|\cdot|\varphi|d\mu=\int_X|f|dV_\Phi.$$

2. 第一の不等式は上の問1によって明らかであるから，第二の不等式が成立するような f_ε の存在を示せばよいが，そのことは定理 12.6 の証明と同じ方法で示される．定理

12. 6 において定理 7. 4 と 7. 5 とを使っているが，これら二つの定理は (Lebesgue 測度の不変性には関係がないから) $\mathfrak{B}_N$ の上で定義された $V(R^N)<\infty$ なる測度 V に対してはいつでも成立する．

§21. 1. 仮定により $|f(x)|\leqq M$ なる M がある．定理 12. 7 によって $h(x+z)=\int f(x+z-y)g(y)dy=\int f(x-y)g(y+z)dy$ だから，定理 12. 8 を使って

$$|h(x+z)-h(x)|\leqq\int|f(x-y)||g(y+z)-g(y)|dy\leqq M\int|g(y+z)-(y)|dy\to 0$$

$(z\to 0$ のとき$)$.

2. $\mu(A)>0$ ならば，$\mu(A_1)>0$ なる有界集合 $A_1\subset A$ が存在し，$[A_1-A_1]\subset[A-A]$ であるから，はじめから $\mu(A)<\infty$ として証明すればよい．この場合，上の問 1 により $h(x)=\int\chi_A(x-y)\chi_{[-A]}(y)dy$ は x の連続函数であるから，$U=\{x;\ h(x)>0\}$ は開集合である．また $h(x)=\int\chi_A(x-y)\chi_A(-y)dy=\int\chi_A(x+y)\chi_A(y)dy$ だから，$h(x)>0$ ならば $x+y\in A$ と $y\in A$ とが同時に成立するような y が存在する；従って $x\in[A-A]$ である．特に $x=0$ (R^N の原点) のとき $h(0)=\int\chi_A(y)^2dy>0$ だから，$0\in U\subset[A-A]$, すなわち $[A-A]$ は原点 0 を内点にもつ．

V

§22. 1. $f\in L^2(X)$ ならば，Schwarz の不等式により

$$\int_X|f|dx\leqq\left\{\int_X|f|^2dx\right\}^{1/2}\left\{\int_X 1^2\,dx\right\}^{1/2}=\mu(X)^{1/2}\|f\|_2<\infty$$

だから，$f\in L^1(X)$ である．(一般に $f\in L^p$ ならば Hölder の不等式により

$$\int_X|f|dx\leqq\left\{\int_X|f|^p dx\right\}^{1/p}\left\{\int_X 1^q dx\right\}^{1/q}=\mu(X)^{1/q}\|f\|_p<\infty.)$$

2. i) $\{\chi_{E_n}\}\subset\boldsymbol{E}$ が $n\to\infty$ のとき $\varphi\in L^p(X)$ に，ノルム $\|\cdot\|_p$ に関して近づくとすると，定理 22. 2 により，適当な部分列 $\{\chi_{E_{n(k)}}(x)\}$ は $\varphi(x)$ に a.e. x で収束する．ところが各 k に対して $\chi_{E_{n(k)}}(x)=1$ または 0 だから，a.e. x で $\varphi(x)=1$ または 0. よって $E=X(\varphi=1)$ とすれば $\varphi=\chi_E$ ($L^p(X)$ の点として等しい)，従って $\mu(E)<\infty$ であり，$\varphi\in\boldsymbol{E}$ となる．

ii) $\chi_A,\ \chi_B\in\boldsymbol{E}$ に対して $|F_f(\chi_A)-F_f(\chi_B)|\leqq\int_X|f|\cdot|\chi_A-\chi_B|dx=\int_{A\ominus B}|f|dx.$

一方 $\|\chi_A-\chi_B\|_p=\left\{\int_X|\chi_A-\chi_B|^p dx\right\}^{1/p}=\mu(A\ominus B)^{1/p}$ だから，$\|\chi_A-\chi_B\|_p\to 0$ のとき $\mu(A\ominus B)\to 0$, 従って定理 13. 4 により $\int_{A\ominus B}|f|dx\to 0$ となるから $|F_f(\chi_A)-F_f(\chi_B)|\to 0.$

§23. 1. $f\in L^1\frown M$ ならば $\int|f(x)|^p dx\leqq\int\|f\|_\infty{}^{p-1}|f(x)|dx=\|f\|_\infty{}^{p-1}\|f\|_1<\infty$. また $f_n\in L^1\frown M$, $\sup_n\|f_n\|_\infty=N<\infty$, $f\in L^1$, $\|f_n-f\|_1\to 0$ $(n\to\infty)$ ならば，$\{f_n(x)\}$ の或る

部分列が a. e. x で $f(x)$ に近づくから $|f(x)|\leqq N$ (a. e. x), すなわち $f\in M$. 従って, 最初の積分の計算と同様に $\|f_n-f\|_p{}^p\leqq\|f_n-f\|_\infty{}^{p-1}\|f_n-f\|_1\leqq(\|f_n\|_\infty+\|f\|_\infty)^{p-1}\|f_n-f\|_1$ $\leqq(2N)^{p-1}\|f_n-f\|_1\to0$ $(n\to\infty)$.

2. $\operatorname*{ess.sup}_{x\in X}|f(x)|=\alpha<\infty$ のとき. $\left\{\int_X|f|^pdx\right\}^{1/p}\leqq\left\{\int_X\alpha^pdx\right\}^{1/p}=\alpha\mu(X)^{1/p}\to\alpha$ $(p\to\infty)$. だから $\overline{\lim_{p\to\infty}}\left\{\int_X|f|^pdx\right\}^{1/p}\leqq\alpha$. 一方任意の $\beta<\alpha$ をとり $E_\beta=X(|f|>\beta)$ とすると, $\mu(E_\beta)>0$ だから, $\left\{\int_X|f|^pdx\right\}^{1/p}\geqq\left\{\int_{E_\beta}\beta^pdx\right\}^{1/p}=\beta\mu(E_\beta)^{1/p}\to\beta(p\to\infty)$. よって $\underline{\lim}_{p\to\infty}\left\{\int_X|f|^pdx\right\}^{1/p}\geqq\beta$ となるが, β は α に任意に近くとれるから $\underline{\lim}_{p\to\infty}\left\{\int_X|f|^pdx\right\}^{1/p}$ $\geqq\alpha$ となり, はじめの不等式とあわせて問題の等式を得る.

ess. sup $|f(x)|=\infty$ のときは, 上の β を任意に大きい数として, 同様に論ずればよい.

3. $|f_n(x)|\leqq N$ $(n=1, 2, \cdots)$ であって, $\{f_n\}$ が f に漸近収束すれば, 定理 23. 1 により $\|f_n-f\|_S\to0$ であり, 定理 23. 3 により $\|f\|_\infty\leqq N$ となる. だから

$$\|f_n-f\|_1\leqq\int\frac{(1+2N)|f_n-f|}{1+|f_n-f|}dx=(1+2N)\|f_n-f\|_S\to0\ \ (n\to\infty).$$

従って問1により, 任意の $p\geqq1$ に対して $\|f_n-f\|_p\to0$ $(n\to\infty)$.

§**24. 1.** $h(x)=f\otimes g(x)=\int f(x-y)g(y)dy$ とする. 仮定により $\mathrm{Car}(f)\subset S_n$, $\mathrm{Car}(g)\subset S_m$ なる n, m がある (S_n は原点を中心とする半径 n の球の内部). $h(x)\neq0$ ならば, その x に対して $f(x-y)g(y)\neq0$ となるような y が存在するから, $x-y\in S_n$, $y\in S_m$ が同時に成立するような y が存在する. 従って $x=(x-y)+y\in S_{n+m}$. だから $\mathrm{Car}(h)\subset S_{n+m}$ となり, $\mathrm{Car}(h)$ は有界である.

2. 問題のような $g\in L^1$ が存在するならば, L^1 に属して有界な任意の函数 $f(x)$ に対して, §21 の問1により $f\otimes g(x)$ は連続函数, 従って $f(x)$ は連続函数になる. しかし $f(x)$ として有界な開区間 I の定義函数 χ_I を考えると, 明らかに矛盾である.

注意. 問2を 'L^1 に属する g で, 任意の $h\in L$ に対して $h\otimes g=h$ となるものは, 存在しない' としてもよい. なぜならば, 任意の $f\in L^1$ に対して $\|h_n-f\|_1\to0$ $(n\to\infty)$ なる $\{h_n\}\subset L$ が存在する (定理 24. 2) から, $\|h_n\otimes g-f\otimes g\|_1\to0$ $(n\to\infty)$, 従って, $h_n\otimes g$ $=h_n$ $(n=1, 2, \cdots)$ ならば $f\otimes g=f$ となり, 問2に帰着される.

3. $g(x)=P(x)D^pf(x)$ とおくと, 任意の偏微分演算子 D^q に対して, $D^qg(x)$ は Leibniz の公式により

$$\sum_{\nu=1}^n P_\nu(x)D^{r^{(\nu)}}f(x)\quad\left(\begin{array}{l}P_\nu(x)\text{ は }P(x)\text{ より次数が高くない}\\ \text{多項式, }|r^{(\nu)}|\leqq|p|+|q|\end{array}\right)$$

なる形に書ける. l を $P(x)$ の次数より大きい自然数とすると $\lim_{|x|\to\infty}\{|P_\nu(x)|/|x|^l\}=0$ だから, 任意の自然数 m に対して

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^m|D^qg(x)|\leqq\lim_{|x|\to\infty}\sum_{\nu=1}^n|x|^{m+l}|D^{r^{(\nu)}}f(x)|=0\ \ (\because f\in\mathfrak{S}).$$

よって $g\in\mathfrak{S}$ である.

4. 任意の $h\in L(\subset L_\infty)$ に対して，定理 24. 6 の ii) により $\|g_n-h\|_\infty\to 0$ $(n\to\infty)$ なる $\{g_n\}\subset\mathfrak{S}$ がとれる．従って $\left|\int f(x)g_n(x)dx-\int f(x)h(x)dx\right|\leqq\|f\|_1\cdot\|g_n-h\|_\infty\to 0.$ ここで仮定によりすべての n に対して $\int f(x)g_n(x)dx=0$ だから，$\int f(x)h(x)dx=0$ となる．だから定理 24. 3 により $f(x)=0$ (a. e.).

5. $G=\{x;\ f(x)>0\}$，$H=\{x;\ f(x)<0\}$ とする．$G\neq\phi$ とすると，一点 $x_0\in G$ をとり $\varepsilon=f(x_0)/2$ とおくとき，f の連続性により x_0 の適当な δ- 近傍 $U(x_0,\ \delta)$ (付録 § 1) をとれば，$x\in U(x_0,\ \delta)$ なるかぎり $f(x)>\varepsilon$. この δ に対して (24. 13) を満たす $h_\delta(x)\in\mathfrak{S}$ をとると，$h_\delta(x-x_0)\neq 0$ となるのは $x\in U(x_0,\ \delta)$ のときにかぎるから，$h_\delta(x)\geqq 0$ により

$$\int f(x)h_\delta(x-x_0)dx\geqq\varepsilon\int h_\delta(x-x_0)dx=\varepsilon\int h_\delta(x)dx=\varepsilon>0.$$

$h_\delta(x-x_0)$ も x の函数として $\mathfrak{S}$ に属するから，上の議論により，$G\neq\phi$ ならば $h(x)\geqq 0$, $\int f(x)h(x)dx>0$ なる $h\in\mathfrak{S}$ が存在する．同様にして，$H\neq\phi$ ならば $h(x)\geqq 0$, $\int f(x)h(x)dx<0$ なる $h\in\mathfrak{S}$ が存在することが証明される．だから，i) の仮定のもとでは $H=\phi$ でなければならないから $f(x)\geqq 0$ であり，ii) の仮定のもとでは $G=H=\phi$ でなければならないから $f(x)\equiv 0$ である．

§ 25. 1. $\|Tf\|_1\leqq\|T\|\cdot\|f\|$ $(f\in\boldsymbol{D}(T))$ なることは，$\|T\|$ の定義から明らか．従って $\sup\limits_{\substack{f\in D(T)\\ \|f\|=1}}\|Tf\|_1\leqq\sup\limits_{\substack{f\in D(T)\\ \|f\|\leqq 1}}\|Tf\|_1\leqq\|T\|$ であり，$\|T\|=0$ の場合はこの二つの $\leqq$ は $=$ となる．また $\|T\|>0$ の場合は，$\|T\|$ の定義により，$0<\alpha<\|T\|$ なる任意の α に対して $\|Tg\|_1>\alpha\|g\|$ なる $g\in\boldsymbol{D}(T)$ が存在する；このとき $g\neq 0$ である ($\because g=0$ なら $\|Tg\|_1=0=\alpha\|g\|$ となる). よって $f=g/\|g\|$ とおくと $f\in\boldsymbol{D}(T)$, $\|f\|=1$ であって $\|Tf\|_1=\|Tg\|_1/\|g\|>\alpha$. だから $\sup\limits_{\substack{f\in D\\ \|f\|=1}}\|Tf\|_1>\alpha$；ここで α は $\|T\|$ にいくらでも近くとることができて，左辺の sup は α に無関係であるから，その sup は $\geqq\|T\|$ となる．このこととはじめの結果から，(25. 6) の第 2 の式を得る．

2. はじめに (25. 4) を仮定する．$\boldsymbol{A}$ が有界ならば，$\boldsymbol{A}\subset\{f;\ \|f\|\leqq\alpha\}$ なる α が存在するから，任意の $f\in\boldsymbol{A}$ に対して $\|Tf\|_1\leqq\beta\|f\|\leqq\beta\alpha$. すなわち $\boldsymbol{B}\subset\{h;\ \|h\|_1\leqq\beta\alpha\}$ となり，$\boldsymbol{B}$ は有界である．すなわち (25. 5) が成立する．次に (25. 4) を否定すると，任意の自然数 n に対して $\|Tf_n\|_1>n\|f_n\|$, $\|f_n\|\neq 0$ なる $f_n\in\boldsymbol{D}(T)$ が存在する (定理 25. 1 の証明を見よ). よって $g_n=f_n/\|f_n\|$, $\boldsymbol{A}=\{g_1,\ g_2,\ \cdots,\ g_n,\ \cdots\}$ とおくと，$\boldsymbol{A}$ は有界 $(\|g_n\|=1)$ であるが，$\|Tg_n\|_1=\|Tf_n\|_1/\|f_n\|>n$ であるから，$\boldsymbol{B}=\{Tf;\ f\in\boldsymbol{A}\}$ は有界でない；すなわち (25. 5) が成立しない．

VI

§ 27. 1. i) $\|f+g\|^2=(f+g,\ f+g)=\|f\|^2+(f,\ g)+(g,\ f)+\|g\|^2$, $\|f-g\|^2=(f-g,$

$f-g)=\|f\|^2-(f,\ g)-(g,\ f)+\|g\|^2$. この二つの式を辺々相加えると，求める式が出る.

ii) は，上の二つの式および $\|f\pm ig\|^2$ を同様に展開した式を作り，右辺の形の一次結合を作れば，$4(f,\ g)$ だけが残って他の項は消える.

2. 例2の直交性を出す計算（同所脚注参照）と同様にして，$m\neq n$ ならば

$\int_0^\pi \cos mx\cdot\cos nx\,dx=0,\ \int_0^\pi \sin mx\cdot\sin nx\,dx=0$ が出るから，S_1, S_2 のそれぞれは $L^2(0,\ \pi)$ における直交系である. しかし m, n の一方が偶数で他方が奇数ならば $\int_0^\pi \cos mx\cdot\sin nx\,dx\neq 0$ であるから，$S_1\cup S_2$ は $L^2(0,\ \pi)$ における直交系ではない.

3. $\lambda_1\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx=\int_a^b \lambda_1 p(x)y_1(x)y_2(x)dx=\int_a^b \{q(x)y_1(x)-y_1''(x)\}y_2(x)dx$

（ここで $y_1''y_2$ の項に部分積分を二回行なって，境界条件から $[y_1'\cdot y_2]\Big|_a^b=[y_1\cdot y_2']\Big|_a^b$ $=0$ となることを使うと）

$$=\int_a^b y_1(x)\{q(x)y_2(x)-y_2''(x)\}dx=\int_a^b y_1(x)\cdot\lambda_2 p(x)y_2(x)dx=\lambda_2\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx.$$

ここで $\lambda_1\neq\lambda_2$ だから $\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx=0$. すなわち φ_1 と φ_2 とは直交する.

注意 1. 実数値係数の微分方程式の解は実数値函数の範囲内で存在するから，上の証明は y_1, y_2 ともに実数値として証明した. しかし y_1, y_2 が複素数値函数であっても，上の証明は y_2, φ_2 をそれぞれ $\bar{y}_2$, $\bar{\varphi}_2$ と書くだけでそのまま成立する（$p>0$ で q が実数値だから).

注意 2. y が (27. 9), (27. 10) の解という場合に，(27. 9) を開区間 $(a,\ b)$ で満たし，(27. 10) は '$\lim_{x\to a+0} y(x)$, $\lim_{x\to b-0} y(x)$ が存在して 0 である' という意味に解することがある. その場合 $y'(a)$, $y'(b)$ の存在は一応問題の仮定にはないわけであるが，$a<c<b$ なる c を一つ固定するとき，(27. 9) により $c<x<b$ ならば $y'(x)-y'(c)=\int_c^x (qy-\lambda py)dx$ となるから，有限な $\lim_{x\to b-0} y'(x)$ が存在する. 同様にして，有限な $\lim_{x\to a+0} y'(x)$ も存在するから，上の証明中の部分積分の所はそのまま成立するのである.

§28. 1. 定理 24. 5 の系の証明において，'多項式 $P(x)$' を 'φ_n の一次結合' でおきかえて，その結果に定理 28. 4 を適用すればよい.

2. $\int_{-A}^A e^{i(m-n)\pi x/A}dx=2A\delta_{mn}$ $(m,\ n\geqq 0)$ により明らか.

§29. 1. 定理 29. 3 と (29. 9) により

$$(u_t\otimes u_s)^\wedge(\xi)=\hat{u}_t(\xi)\hat{u}_s(\xi)=e^{-2\pi^2 t|\xi|^2}e^{-2\pi^2 s|\xi|^2}=e^{-2\pi^2(t+s)|\xi|^2}=\hat{u}_{t+s}(\xi).$$

だから定理 29. 5 の系により $u_t\otimes u_s=u_{t+s}$.

2. i) 変数変換 $x=\sqrt{t}\,y$ により $\int u_t(x)f(x)dx=\int u_1(y)f(\sqrt{t}\,y)dy$ となる. 仮定により $t\downarrow 0$ のとき任意の y に対して $f(\sqrt{t}\,y)\to f(0)$, また $|f(x)|\leqq M$ なる M があるから $|u_1(y)f(\sqrt{t}\,y)|\leqq Mu_1(y)\in L^1$. だから Lebesgue の収束定理 13. 6′ により求める式が得られる.

ii) $|\varphi(\xi)\hat{u}_t(\xi)|\leqq\varphi(\xi)\in L^1$, $t\downarrow 0$ のとき各点 ξ で $\hat{u}_t(\xi)\to 1$ だから，Lebesgue の収束定理を使えばよい．

3. R^1 の上の $u_t(x)=(2\pi t)^{-1/2}e^{-x^2/2t}$ に対して $\hat{u}_t(\xi)=e^{-2\pi^2 t\xi^2}$ だから，これに (29. 20) を適用して，$2\pi t$ を t でおきかえればよい．

4. 仮定により $f\in\mathfrak{S}$ であって f の台が有界だから，任意の実数 η に対して $g_\eta(x)=e^{2\pi\eta x}f(x)$ も $\mathfrak{S}$ に属する．従って $\zeta=\xi+i\eta$ に対して

$$\hat{f}(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi i(\xi+i\eta)x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi i\xi x}g_\eta(x)dx=\hat{g}_\eta(\xi).$$

だから g_η に Plancherel の定理を適用して

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi i x\zeta}\hat{f}(\zeta)d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi i x(\xi+i\eta)}\hat{g}_\eta(\xi)d\xi=e^{-2\pi x\eta}g_\eta(x)=f(x).$$

5. $h\in L^1$ なることは明らか (§24)．また Schwarz の不等式により

$$|h(x)|\leqq\left\{\int|f(x-y)|^2dy\right\}^{1/2}\left\{\int|g(y)|^2dy\right\}^{1/2}=\|f\|_2\cdot\|g\|_2<\infty$$

だから，$|h(x)|^2\leqq\|f\|_2\|g\|_2|h(x)|\in L^1$，従って $h\in L^2$．(定理 24. 4 を使えば，$h\in L^2$ も最初から明らか．) だから Plancherel の定理により $\hat{f}$, $\hat{g}$, $\hat{h}\in L^2$．また定理 29. 3 により $\hat{h}(\xi)=\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$ だから，Schwarz の不等式によって $\int|\hat{h}(\xi)|d\xi\leqq\|\hat{f}\|_2\|\hat{g}\|_2<\infty$．すなわち $\hat{h}\in L^1$．

6. i) $f(x)$ が実数値偶函数ならば $\hat{f}(\xi)=\int e^{-2\pi i\xi\cdot x}f(x)dx=\int e^{2\pi i\xi\cdot x}f(-x)dx$ $=\overline{\int e^{-2\pi i\xi\cdot x}f(x)dx}=\overline{\hat{f}(\xi)}$ となるから，$\hat{f}(\xi)$ は実数値函数である．

ii) $f(x)$ が実数値奇函数の場合は，上と同様な計算で $\hat{f}(\xi)=-\overline{\hat{f}(\xi)}$ が出るから，$\hat{f}(\xi)$ は純虚数の値をとる．

§**30. 1.** 任意の $x_1,\cdots,x_n\in R^N$ と任意の複素数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ を固定するとき

$$\sum_{p,q=1}^{n}\alpha_p\bar{\alpha}_q\int\int\varphi(x-y)h_\delta(x-x_p)h_\delta(y-x_q)dxdy\geqq 0$$

(h_δ は (24. 13) の函数；上の式の左辺は本文中に書いた式と同じであるから，仮定によって $\geqq 0$ である)．φ の連続性により，任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta_\varepsilon>0$ が存在して，$x-x_p\in U_{\delta_\varepsilon}$, $y-x_q\in U_{\delta_\varepsilon}$ ((24. 13) における記号) ならば $|\varphi(x-y)-\varphi(x_p-x_q)|<\varepsilon$ となる；ここで δ_ε はすべての p, q に共通にとれる．だから，h_δ の性質 $\int h_\delta(x)dx=1$ により，$0<\delta<\delta_\varepsilon$ ならば

$$\left|\sum_{p,q}\alpha_p\bar{\alpha}_q\varphi(x_p-x_q)-\sum_{p,q}\alpha_p\bar{\alpha}_q\int\int\varphi(x-y)h_\delta(x-x_p)h_\delta(y-x_q)dxdy\right|$$
$$\leqq\sum|\alpha_p||\alpha_q|\varepsilon=\varepsilon(|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|)^2.$$

よって

$$\sum_{p,q}\alpha_p\bar{\alpha}_q\varphi(x_p-x_q)=\lim_{\delta\downarrow 0}\sum_{p,q}\alpha_p\bar{\alpha}_q\int\int\varphi(x-y)h_\delta(x-x_p)h_\delta(y-x_q)dxdy\geqq 0.$$

2. 任意の $x_1, \cdots, x_n \in R^N$ と任意の複素数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ に対して

$$\sum_{p,q=1}^{n} \alpha_p \bar{\alpha}_q \varphi(x_p - x_q) = \sum_{p,q} \int \alpha_p \bar{\alpha}_q e^{2\pi i\xi\cdot(x_p - x_q)} d\mu(\xi)$$

$$= \int \left(\sum_p \alpha_p e^{2\pi i\xi\cdot x_p}\right) \overline{\left(\sum_q \alpha_q e^{2\pi i\xi\cdot x_q}\right)} d\mu(\xi) = \int \left|\sum_p \alpha_p e^{2\pi i\xi\cdot x_p}\right|^2 d\mu(\xi) \geqq 0.$$

また $\varphi(x)$ は $x=0$ で連続である．なぜならば $|\varphi(x)-\varphi(0)| \leqq \int |e^{2\pi ix\cdot\xi}-1| d\mu(\xi)$ において，各 ξ に対して $\lim_{x\to 0} |e^{2\pi ix\cdot\xi}-1|=0$, $|e^{2\pi ix\cdot\xi}-1| \leqq 2$ であって $\int d\mu(\xi) < \infty$ だから Lebesgue の収束定理 13. 6′ により $\lim_{x\to 0} |\varphi(x)-\varphi(0)|=0$ となる．最後に $\varphi(0) = \mu(R^N)$ は (30. 8) から明らかである．

§31. **1.** 任意の $\varphi \in \mathfrak{D}(G)$ に対して $G_0=\{x\,;\,\varphi(x)\neq 0\}$ は $\bar{G}_0 \subset G$ なる有界領域だから，仮定により $(u_n, \varDelta\varphi)=(\varDelta u_n, \varphi)=0$ であって，

$$|(u_n, \varDelta\varphi)-(u, \varDelta\varphi)| \leqq \|\varDelta\varphi\|_\infty \int_{G_0} |u_n(x)-u(x)| dx \to 0 \ (n\to\infty).$$

だから $(u, \varDelta\varphi)=0$ となり，定理 31. 2 により，$u(x)$ は G で調和な或る函数 $v(x)$ と a. e. $x \in G$ で一致する．

2. Hilbert 空間の条件のうち，完備性以外の性質は容易にためすことができるから，完備性を証明する．$\{f_n\}$ をこの問題の性質を満たす函数の基本列: $\|f_n - f_m\|_2 \to 0$ $(n, m \to\infty)$ とすると，$L^2(G)$ の完備性により，$\|f_n - f_\infty\|_2 \to 0$ $(n\to\infty)$ なる $f_\infty \in L^2(G)$ が存在する．この f_∞ が正則函数であることをいえばよい．$n=1, 2, \cdots, \infty$ に対して $f_n(z)$ の実数部分，虚数部分をそれぞれ $u_n(z)$, $v_n(z)$ とすると，$\|u_n - u_\infty\|_2 \to 0$, $\|v_n - v_\infty\|_2 \to 0$. 従って，$\bar{G}_0 \subset G$ なる任意の有界領域 G_0 に対して，Schwarz の不等式により $\|u_n - u_\infty\|_1 \leqq \|u_n - u_\infty\|_2 \mu(G_0)^{1/2} \to 0$, 同様に $\|v_n - v_\infty\|_1 \to 0$ もいえる．だから前題と同様にして $u_\infty(z)$, $v_\infty(z)$ は G で調和函数であるとしてよい．u_n と v_n は Cauchy-Riemann の微分方程式を満たすから，任意の $\varphi \in \mathfrak{D}(G)$ に対して

$$\left(\frac{\partial u_\infty}{\partial x} - \frac{\partial v_\infty}{\partial y},\ \varphi\right) = -\left(u_\infty,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \left(v_\infty,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{-\left(u_n,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \left(v_n,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} - \frac{\partial v_n}{\partial y},\ \varphi\right) = 0.$$

よって $\partial u_\infty/\partial x = \partial v_\infty/\partial y$. 同様にして $\partial u_\infty/\partial y = -\partial v_\infty/\partial x$. すなわち u_∞ と v_∞ に対して Cauchy-Riemann の微分方程式が成立するから，$f_\infty(z)$ は正則函数である．

付　録

§1. **1.** F, G がそれぞれ閉集合，開集合ならば，定理 6 により F^c, G^c はそれぞれ開集合，閉集合である．だから定理 4 により $F-G=F\frown G^c$ は閉集合，また定理 5 により $G-F=G\frown F^c$ は開集合である．

2. $x \in \bar{F}$ とすると，$0<\varepsilon<1$ なる任意の ε に対して $U(x, \varepsilon)\frown\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \neq \phi$. ところが

$x \in S_{m-1}$ なる m をとると $U(x, \varepsilon) \frown S_m{}^c = \phi$ だから，仮定により $U(x, \varepsilon) \frown \left(\bigcup_{n=m}^{\infty} F_n\right) = \phi$. だから $U(x, \varepsilon) \frown \left(\bigcup_{n=1}^{m-1} F_n\right) \neq \phi$. ε は任意に小さい正数にとれるから

$$x \in \overline{F_1 \smile F_2 \smile \cdots \smile F_{m-1}} = F_1 \smile F_2 \smile \cdots \smile F_{m-1} \text{（定理 3 の iii)).}$$

よって $x \in F_n$ なる n があるから，$x \in F$ となる．すなわち $\bar{F} \subset F$ だから，F は閉集合である．

3. $E_\alpha = \{x;\ x \in E,\ f(x) < \alpha\}$ とする．$x \in E_\alpha$ ならば，f が連続なことにより，x の適当な近傍 $U(x)$ をとれば，$y \in U(x) \frown E$ なるかぎり $f(y) < \alpha$ となる．すなわち $E \frown U(x) \subset E_\alpha$. よって，$G_\alpha = \bigcup_{x \in E_\alpha} U(x)$ とおくと，G_α は開集合であって $E \frown G_\alpha \subset E_\alpha$. 一方 G_α の定義から $E_\alpha \subset E \frown G_\alpha$ なることは明らかだから，$E_\alpha = E \frown G_\alpha$ となる．

§**2. 1.** $F \subset K_0$ なる閉立方体 K_0 をとり，その一辺の長さを l とすると，本文中に書いた‘方針’のようにして，一辺の長さが $l/2$ の閉立方体 $K_1 \subset K_0$ で，$E \frown K_1$ が無限集合になるものがとれる．この論法をくりかえすと，閉立方体の単調減少列 $\{K_n\}$ で，各 n に対して K_n の一辺の長さは $l/2^n$ で $E \frown K_n$ は無限集合，となるものがとれる．だから補助定理 1 により $\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$ はただ一点からなるから，その点を x とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\sqrt{N}\, l/2^n < \varepsilon$ なる n をとれば，$x \in K_n$ なることにより $K_n \subset U(x, \varepsilon)$, 従って $E \frown K_n \subset E \frown U(x, \varepsilon)$ となるから，$E \frown U(x, \varepsilon)$ は無限集合である．だから x は E の集積点である．

2. 本文中の‘方針’に述べたように $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ であって，各 S_n は開集合であるから，E は有限個の S_n で掩われる．その S_n の番号 n のうちで最大のものを m とすると，$E \subset S_m$ であるから E は有界である．次に，$x \notin E$ とすると，任意の $y \in E$ に対して $\rho(x, y) > \dfrac{1}{n}$ なる n がとれて $y \in \overline{U(x, 1/n)}^c$ となるから，$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U(x, 1/n)}^c$ となる．各 n に対して $\overline{U(x, 1/n)}^c$ は開集合だから，上と同様にして $E \subset \overline{U(x, 1/m)}^c \subset U(x, 1/m)^c$ なる m がある．従って $x \notin \bar{E}$ となる．よって $\bar{E} \subset E$ となるから，E は閉集合である．

§**3. 1.** $f(x) = \rho(x, G^c)$ は定理 2 によって R^N の上で連続だから，$F_n = \{x;\ f(x) \geqq 1/n\}$ は閉集合（$\because F_n{}^c = \{x;\ f(x) < 1/n\}$ は §1 問 3 によって開集合）であり，n について単調増加である．そして定理 1 により $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \{x;\ f(x) > 0\} = \overline{(G^c)}^c = G$. また $F_n{}' = F_n \frown \bar{S}_n$ とすると，$\{F_n{}'\}$ は有界閉集合の単調増加列で

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n{}' = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \frown \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{S}_n\right) = G \frown R^N = G.$$

2. $x \in G$ ならば，定理 1 により $\rho(x, G^c) > 0$ だから，十分大きいすべての n に対して $n \cdot \rho(x, G^c) \geqq 1$, 従って $f_n(x) = 1$ となる．だから $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 1 = \chi_G(x)$. また，$x \notin G$ ならば $\rho(x, G^c) = 0$ だから，すべての n に対して $f_n(x) = 0$, 従って $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 = \chi_G(x)$.

§4. 1. E が閉集合とする．点列 $\{x_n\}\subset E$ が点 $x\in X$ に収束すれば，任意の $\varepsilon>0$ に対して $x_n\in U(x,\varepsilon)$ なる x_n があるから，$E\frown U(x,\varepsilon)\neq\phi$．だから $x\in\bar{E}=E$．また，E が閉集合でないとすると，$\bar{E}-E$ に属する点 x がある．$n=1, 2, \cdots$ に対して，$U(x, 1/n)\frown E\neq\phi$ だからその中に点 x_n がとれる．このとき，点列 $\{x_n\}$ は E に含まれていて x に収束するが，$x\notin E$ である．

2. $f(x)$ が E で連続とし，点列 $\{x_n\}\subset E$ が点 $x\in E$ に収束していると仮定する．このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して，適当な $\delta>0$ をとれば，$y\in U(x,\delta)$ なるかぎり $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$ となる．この δ に対して適当な n_0 をとれば，$n\geqq n_0$ なるかぎり $x_n\in U(x,\delta)$ 従って $|f(x_n)-f(x)|<\varepsilon$ となる．だから $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$ である．また，$f(x)$ が E の一点 x で連続でないとすると，適当な $\varepsilon>0$ をとれば，任意の n に対して $U(x, 1/n)\frown E$ の中に $|f(x_n)-f(x)|\geqq\varepsilon$ となるような点 x_n が存在する．このとき点列 $\{x_n\}$ は E に含まれていて x に収束するが $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$ は成立しない．

あとがき

本書に関連のある書物をあげよう．ここには，本書を読むために，或いは本書に続いて，読まれることをおすすめする書物ばかりでなく，本書を書くのに参考にしたものおよびそれらに関連するいくつかの書物をあげておく．しかし関係書の完全なリストではない．

まず，予備知識として§2 および付録に解説した一般集合論，点集合論に関しては

［1］ 能代清，極限論と集合論（岩波），第六章・第七章，

［2］ 中山正，集合・位相・代数系（至文堂），第Ⅰ章・第Ⅱ章，

［3］ 亀谷俊司，集合と位相（朝倉数学講座）

などがある．［1］は初学者にもわかりやすいように懇切丁寧に書いてあり，本書を読まれるにはこれで十分であるが，数学専攻を希望される方は［2］または［3］を通読せられるのもよいであろう．次に，Lebesgue 積分論を解説したものは，まず

［4］ 高木貞治，解析概論，改訂版（岩波）第九章，

発展の歴史をたどりながら解説した書物に

［5］ 功力金二郎，実函数論および積分論（共立，基礎数学講座），

があり，また

［6］ 河田敬義，積分論（共立全書）

は Riemann 積分からの橋渡しも含めて Lebesgue 積分論として十分な内容を手ぎわよくまとめてある．類書として

［7］ 小松勇作，ルベック積分（共立全書）

があるが，この内容は Euclid 空間における Lebesgue 積分論が中心である．なお

［8］ 河田敬義，集合・位相・測度（岩波，現代応用数学）

は［2］のⅠ，Ⅱ章と［6］の内容を簡単にまとめたものになっていると言えよう．また

［9］ 泉信一，実函数論（自文堂，絶版？），

［10］ 辻正次，実函数論（槇書店）

の中にも Euclid 空間における Lebesgue 積分論の解説がある．このほか，大著

［11］ 中野秀五郎，測度論Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ巻（裳華房）

があるが，初学者向きではないように思う．外国の書物の中で代表的なものとしては

[12] S. Saks, Theory of the integral, Monog. Mat., Warszawa (1937),

[13] P. R. Halmos, Measure theory, Van Nostrand, New York (1950),

[14] N. Bourbaki, Intégration, Hermann, Paris (1952),

[15] スミルノフ，高等数学教程（邦訳，共立出版），第Ⅴ巻

などがある．また古典的な書物として

[16] H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Gauthier-Villars, Paris (第一版 1904, 第二版 1928),

[17] C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Teubner, Leipzig

(第一版 1918, 第二版 1927),

[18] C. de la Vallée Poussin, Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensemble, Classes de Baire, Gauthier-Villars, Paris (1934)

をあげておこう.

本書は，第IV章までに積分論の一通りの構成を終り，その応用として，第V章で積分論に直接関係のある函数空間のいくつかの例とその基本的性質を述べ，第VI章で Fourier 級数，Fourier 解析の一般論に触れたが，Fourier 解析については，N 次元 Euclid 空間において一般的に成立する定理を述べただけで，1次元空間の場合のくわしい議論は紙数の都合上割愛した．それらについては [9], [15] および

[19] 吉田耕作, ヒルベルト空間論 (共立全書),

[20] E. C. Titchmarsh, Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford Univ. Press (1937),

[21] R. E. A. C. Paley-N. Wiener, Fourier transforms in the complex domain, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. (1934)

などを見られたい．また Haar 測度 (位相群の上の不変測度) や確率論との関連についても (積分論の書物としては) 述べるべきかも知れないが，このシリーズの程度をやや越えるように思われることと紙数の関係でまったく述べなかった．Haar 測度については [6], [13] および [12] の付録に簡単に解説してあるが，さらに

[22] 淡中忠郎, 位相群論 (岩波, 現代数学叢書),

[23] A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, Paris (1940),

[24] L. H. Loomis, An introduction to abstract harmonic analysis, Van Nostrand, New York (1953)

などは Haar 測度の理論および応用にくわしい．また確率論との関連についても [13] に簡単な解説があるが，この方面の専門書としては，まず測度論的確率論の創始者であるところの Kolmogoroff の名著

[25] A. Kolmogoroff, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Erg. Math., Berlin (1933)

があり，その精神に沿って書かれた確率論の書物はかなり多いが，一応次のものをあげておこう (なお後述の 'エルゴード理論の書物' も参照せられたい):

[26] 伊藤清, 確率論 (岩波, 現代数学),

[27] 河田敬義, 確率論 (共立出版),

[28] J. L. Doob, Stochastic processes, J. Wiley, New York (1953),

[29] M. Loève, Probability theory, Van Nostrand, New York (1960);

これらはいずれも確率論専攻者におすすめする書物である．特に [28] はあまりに厳密で 'がっちり' しているので，読破するには相当な心構えが必要である．

Lebesgue 積分論の応用の典型として，確率論と並んで重要なのは，何といっても位相解析 (函数解析) である．それは偏微分方程式論，積分方程式論，エルゴード理論，量子

力学等の基礎となるからである. 本書を読まれた方が続いて読まれることをおすすめしたいのは, 前にあげた [15], [19] をはじめ

[30] 三村征雄, 位相解析 (共立, 現代数学講座),

[31] 加藤敏夫, 函数空間論 (共立, 応用数学叢書)

などである. 特に [15], [31] は数学専攻以外の方にもわかりやすく読める. このほか位相解析方面の書物は最近多数発行されているが, 代表として次のものをあげておく: 邦書では

[32] 吉田耕作, 位相解析 I (岩波, 現代数学),

[33] 〃 , 近代解析 (共立, 基礎数学講座),

[34] 〃 , 位相解析 I, II (岩波, 現代応用数学),

[35] 岩村聯, 超函数論 (同上)

([8], [34], [35] は一冊の本にまとめて '位相解析の基礎' としても発行されている);
また外国書では

[36] F. Riesz-B. v. Sz. Nagy, Leçons d'analyse fonctionelle, Akad. Kiadó Budapest (1952) (英, 独訳もある),

[37] E. Hille-R. S. Phillips, Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. (1957),

[38] N. Dunford-J. T. Schwartz, Linear operators I, II, III Interscience Publ., New York (1958, 1963, 1971);

上の三つのうちでは [36] が読みやすく, また積分方程式への応用などにも触れてある点で, 最も一般向きと言える (この本の第一部は積分論の解説である). あとの二つは位相解析専攻の学生諸君にのみすすめられる (どちらも, 通読するには厚すぎるが, 必要に応じて参照せられると有益である).

最後に, エルゴード理論に関する書物として

[39] E. Hopf, Ergodentheorie, Erg. Math. Berlin (1937),

[40] 吉田耕作, エルゴード諸定理 (中文館, 絶版?),

[41] P. R. Halmos, Lectures on ergodic theory (日本数学会, 1956)

をあげておく.

追補. 最近次の書物が発行された:

[42] K. Yosida (吉田耕作), Functional analysis, Springer (初版 1965, 第6版 1980)

これは [32] の内容をほとんど含み, 更に超函数, 偏微分方程式に関する多くの事項を解説し, ポテンシャル論の作用素論的取扱いや確率過程にも触れている. 位相解析またはその関連分野の専攻を志す人のための書物ではあるが, [37] や [38] より読み易い.

索　引

L

T

著者略歴

1927年三重県に生まれる．1950年名古屋大学理学部数学科卒業，
1953年名古屋大学理学部講師，1957年東京大学理学部に転任．
1960年東京大学理学部助教授，1965年東京大学理学部教授（1987年停年退職）
1987年東京商船大学教授，
現在，杏林大学教授，東京大学名誉教授，理学博士．
主なる著書：新数学シリーズ　偏微分方程式
岩波講座基礎数学　関数解析（共著）
紀伊國屋数学叢書　拡散方程式
同　優調和函数と理想境界

数学選書 4.　ルベーグ積分入門

1963年4月30日　第1版発行 ©
2002年5月10日　第41版発行

検印省略

定価はカバーに表示してあります．

著作者　伊藤清三（いとうせいぞう）
発行者　吉野達治
発行所　東京都千代田区四番町8番地
電話 東京 3262-9166(代)
株式会社 裳華房
印刷所　株式会社 精興社
製本所　牧製本印刷株式会社

社団法人
自然科学書協会会員

ISBN 4-7853-1304-8

Printed in Japan